



نہاپی فول

ریاضی ۳



فصل ۱ :

تابع

تابع چند جمله‌ای

توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می آیند!

توانی حسابی از ایکس

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$$

ضریبش!

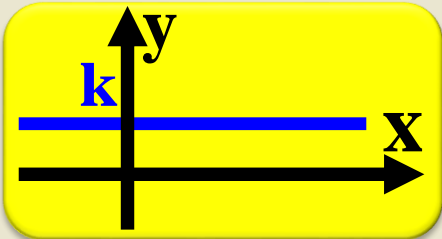
به جملش!

درجه یک چند جمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه!

$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 3$ $\xrightarrow{\text{درجه}}$ **5**

$f(x) = 2x^1 - 3x - \frac{1}{x} + 3$ $\xrightarrow{\text{درجه}}$ ~~⊗~~

توابع چند جمله‌ای خاص



تابع ثابت $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.



$f(x) = (m^3 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{-mn}$ تابعی ثابت است. $m + n$ ؛

۲ تابع خطی ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدا d

پُر واضح است که تابع خطی یک چندجمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

T

تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه ای

به عرض ۱- محور عرض ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلثی

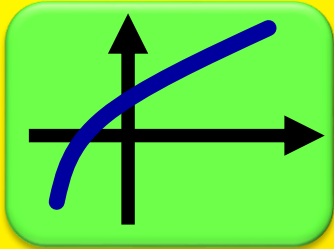
با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $-\frac{1}{48}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

A

یکنوایی توابع

از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود :

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$$

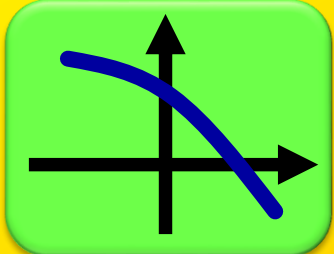


$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

۱ صعودی اکید

با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد

$$f = \{(1, 8), (2, 5), (3, 4)\}$$



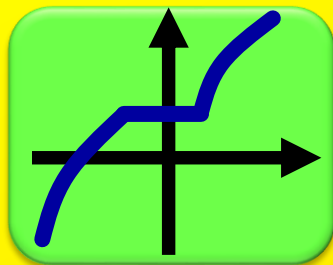
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

۲ نزولی اکید

با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد

به توابع نزولی اکید یا صعودی اکید، **یکنوای اکید** (اکیدا یکنوا) می‌گویند!

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 8)\}$$



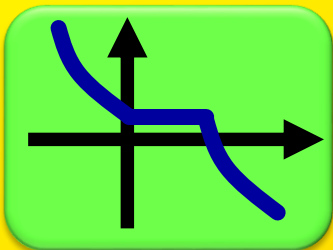
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

صعودی

۳

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y** افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

نزولی

۴

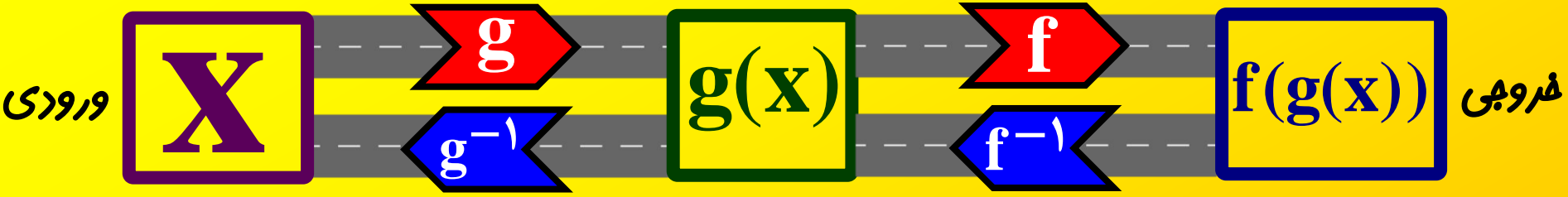
با افزایش مقدار **x**، مقدار **y** کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، **یکنوا** می‌گویند!

به توابعی که نه یکنوا آیند و نه یکنوای اکید، **غیریکنوا** می‌گویند!

ترکیب توابع

$f \circ g(x) = f(g(x))$ یعنی ایکس‌های تابع f را بردار و پاش قرار بده $g(x)$



یادت باشه بیای \emptyset پراتنر بنزارا 

دامنه تابع مرکب

$f \circ g(x) = f(g(x))$; $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$

1 2

نکته: دامنه تابع رو همیشه از راه تعریف (که الان گفتیم) به دست بیارید نه از روی ساختن ضابطه!

مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد فواسته شده را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ← دامنه و ضابطه $f \circ g(x)$ ؟

answer

۶ fof(x) دامنه و ضابطه ← $f(x) = \frac{2}{x-1}$ (ب)

answer

مثال: توابع $f = \{(1,2), (3,4)\}$ و $g = \{(2,3), (5,6)\}$ مفروضند. تابع gof را به دست آورید.

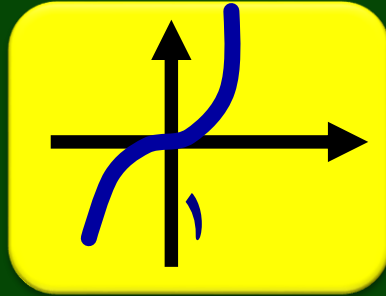
answer

انتقال

بینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد :

$$f(x) + k \quad 1$$

نمودار $f(x)$ ، k واحد و در جهت علامت k ، روی محور y ها حرکت برده!

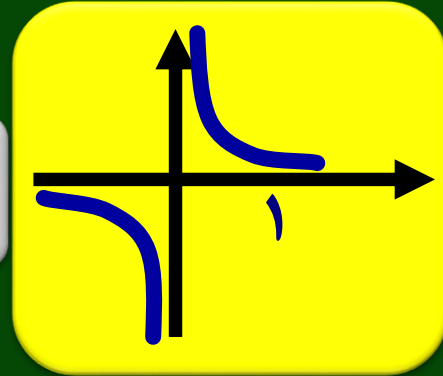


$$y = x^3 - 1$$

ex

$$f(x + k) \quad 2$$

نمودار $f(x)$ ، k واحد در فلاف جهت علامت k ، روی محور x ها حرکت برده!



$$y = \frac{1}{x-1}$$

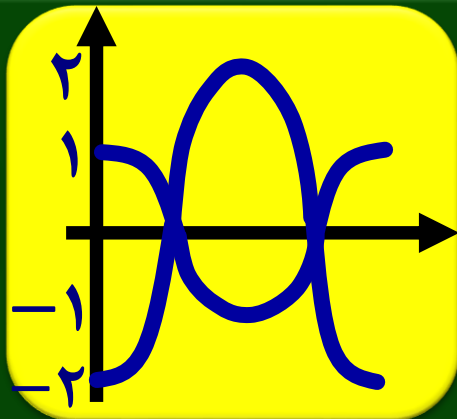
ex

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^3 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

ex

$$y = -2 \cos x$$

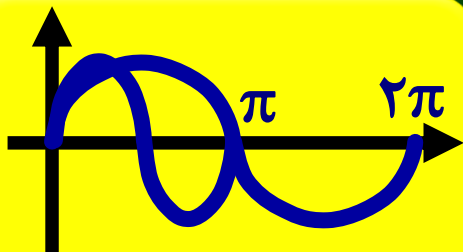


$$kf(x) \quad ۳$$

عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ ، k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)

ex

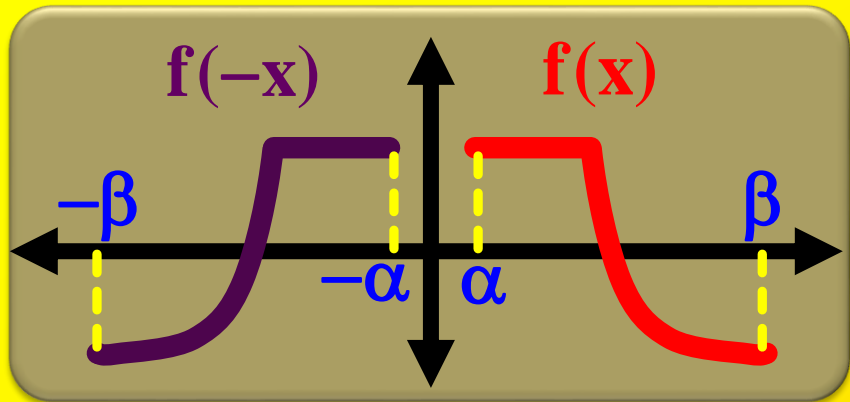
$$y = \sin 2x$$



$$f(kx) \quad ۴$$

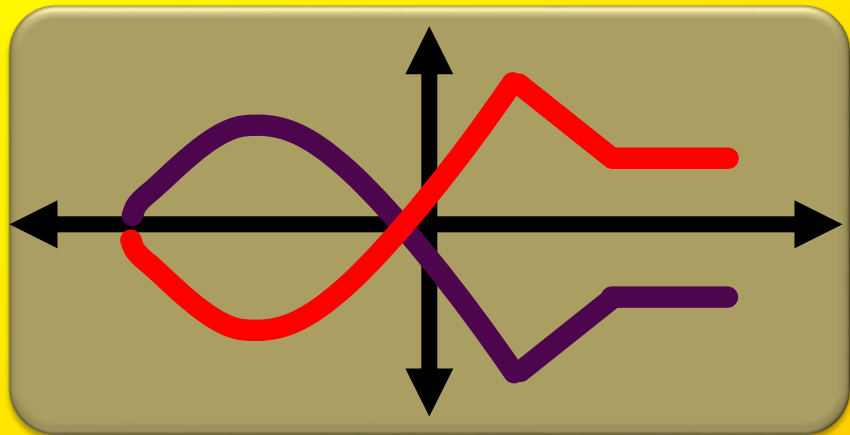
طول نقاط روی نمودار $f(x)$ ، $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)

نکته برعکس!



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

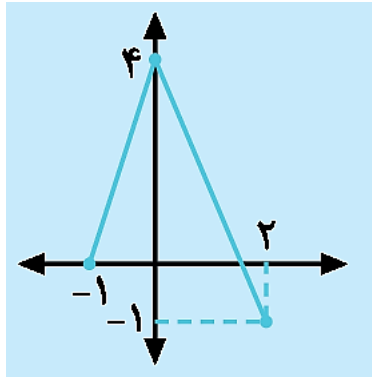
۱



نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

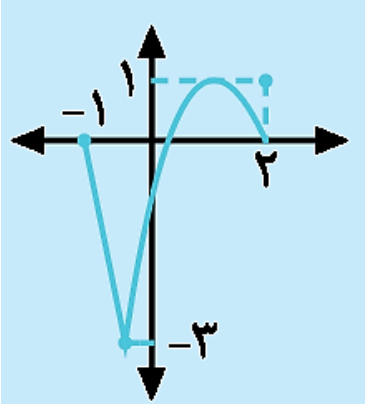
۲

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{2}f(x) + 1$ رسم کنید.



answer

مثال: نمودار تابع g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

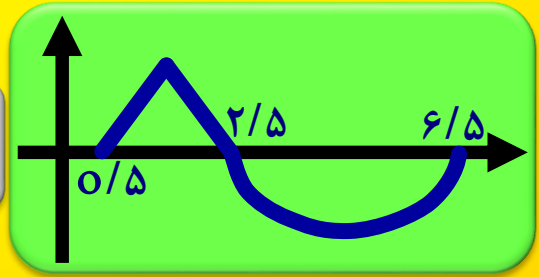


answer

روش سرهنگیزه‌ی رسم $f(ax+b)$

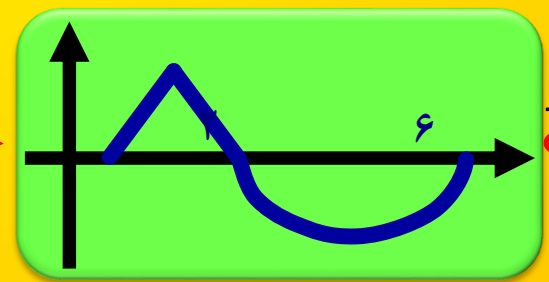
ایکس رو تنها کن و هر کاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بده! دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا!

ex نمودار $f(x)$

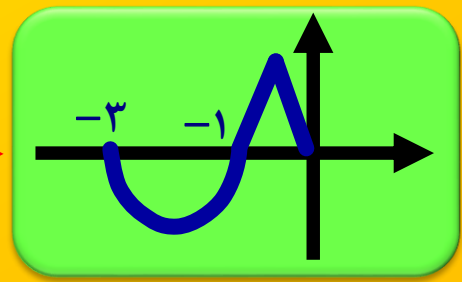


نمودار $f(-2x + 0/5)$
را به دست آورید پیلینز!

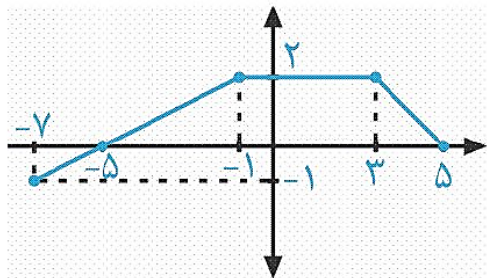
ایکس رو تنها کن
(اول منهای نیم)



$\div (-2)$



مثال) اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ زیر باشد، نمودار تابع f را به کمک آن رسم کنید.



answer

تابع معکوس هر تابع مانند f یک وارون (f^{-1}) دارد. حالا اگر f^{-1} خود یک تابع باشد

می‌گوییم f معکوس‌پذیر است. (آفه گاهی f^{-1} یک تابع نیست!)

توجه شرط لازم و کافی معکوس‌پذیری تابع f این است که f یک‌به‌یک باشد!

محاسبه وارون در زوج مرتب‌ها

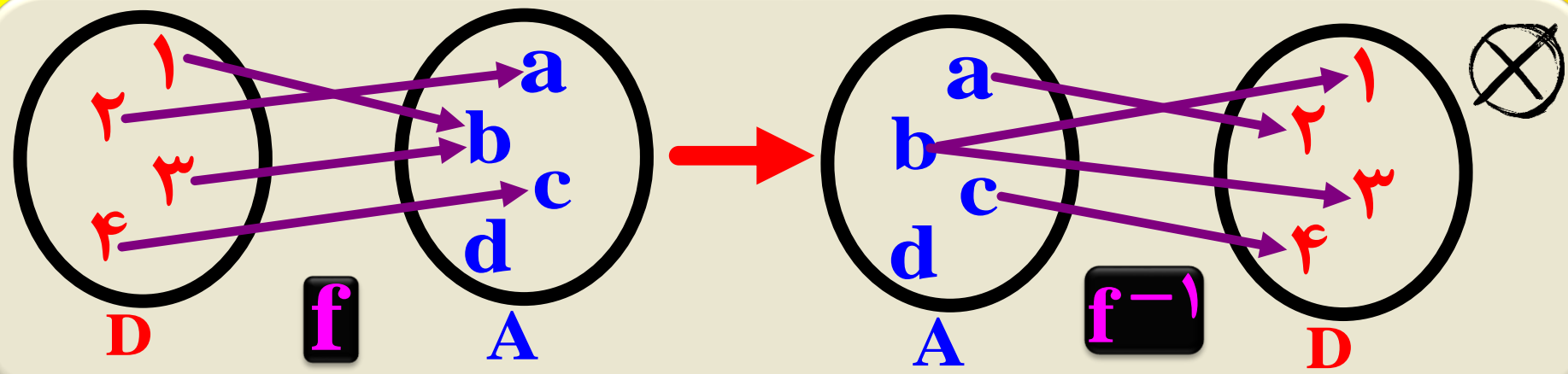
$$f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5)\} \quad \text{✗}$$

$$g = \{(1, 4), (2, 3), (5, 6), (0, 1)\} \rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (6, 5), (1, 0)\}$$

توجه $D_f = R_{f^{-1}} \quad \& \quad R_f = D_{f^{-1}}$

محاسبه وارون در فرم پیکانی

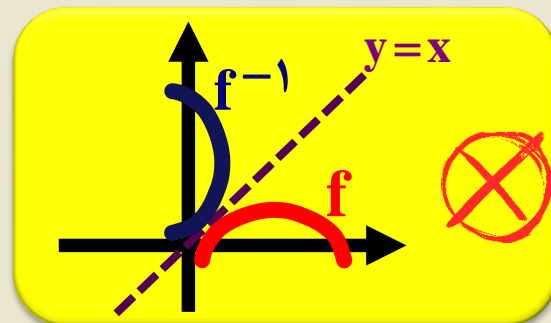
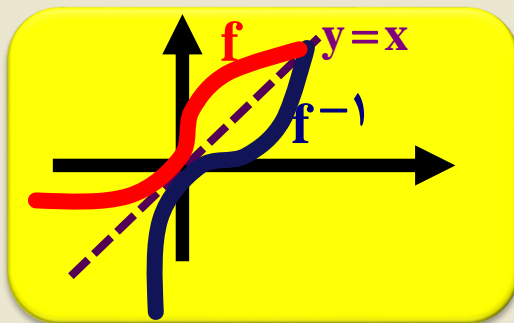
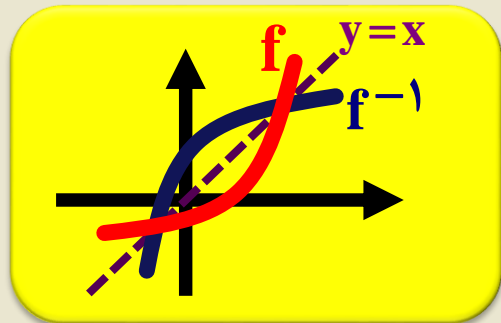
کافی بهت فلش‌ها رو عوض کنید!



آیا در مثال بالا تابع f وارون پذیر است؟ چرا؟!

بدست آوردن نمودار وارون کافی است قرینه‌ی نمودار f نسبت به نیمساز ناحیه اول و

و سوم را به دست بیاورید! نمودار f^{-1} آماده‌ست! نوش جان! :



اگر نقطه (a, b) روی f باشد، نقطه (b, a) روی معکوسش است و بالعکس!

توجه

توجه ترکیب یک تابع با وارونش همانی است.

$$f^{-1} \circ f(x) = x, \quad x \in D_f = R_{f^{-1}} \quad f \circ f^{-1}(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f$$

T هرگاه $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ کدام است؟

$[3, +\infty)$ (۴)

$(-\infty, 3]$ (۳) ✓

$[2, +\infty)$ (۲)

$(-\infty, 2]$ (۱)

A

مثال: اگر $f = \{(1, 4)(2, 3)(3, 5)\}$ ، f^{-1} ، $f \circ f^{-1}$ ، $f^{-1} \circ f$ ، f^{-1} of f ، یا بیابید.

answer

با استفاده از نکته زیر می توان پی برد که آیا دو تابع f و g معکوس هم هستند یا خیر. به این صورت که:

اگر $f \circ g(x) = x$ & $g \circ f(x) = x$ آنگاه f و g معکوس یکدیگرند.

مثال: مثال کتاب نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

answer

ex if $f(x) = 2x - 3$ then $f^{-1}(x) = ?$

بدست آوردن ضابطه‌ی f^{-1}

گام اول
بجای $f(x)$ بنویسید y و سعی کنید x را بر حسب y بدست بیارید (x را تنها کنید!)

گام دوم
بجای y بنویسید x و بجای x بنویسید $f^{-1}(x)$! تمام!

ex if $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{8+9x^3}}$ then $f^{-1}(x) = ?$

مثال: (کار در کلاس) ضابطه وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

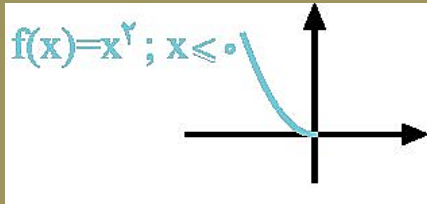
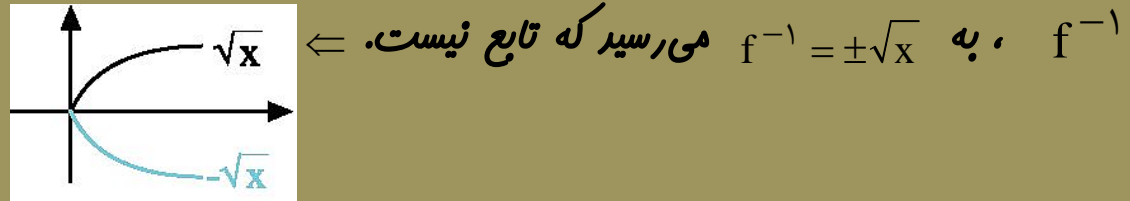
$$h(x) = x^2 + 1 \text{ (الف)}$$

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2} \text{ (ب)}$$

محدود کردن دامنه f (تحدید کردن f)

گاهی f در دامنه تعریفش غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است. در این صورت دامنه آن را طوری محدود می‌کنیم (دلفواه) که f در دامنه جدیدش وارون پذیر شود. به این عمل تحدید کردن f می‌گویند.

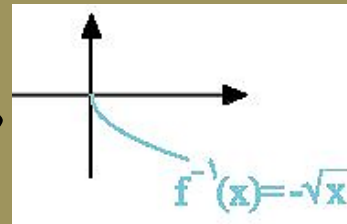
مثلاً با توجه به اینکه $y = x^2$ یک سهمی است، وارون ناپذیر است. اگر بروید سراغ مناسبه



با محدود کردن دامنه f به طور دلفواه، مثلاً $x \leq 0$ ، f یک به یک و معکوس پذیر می‌شود \Leftarrow

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f = [0, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, 0] \end{cases}$$

دقت شود که



و نمودار معکوس f هم می‌شود

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

$$y = (x - 1)^3 - 1$$

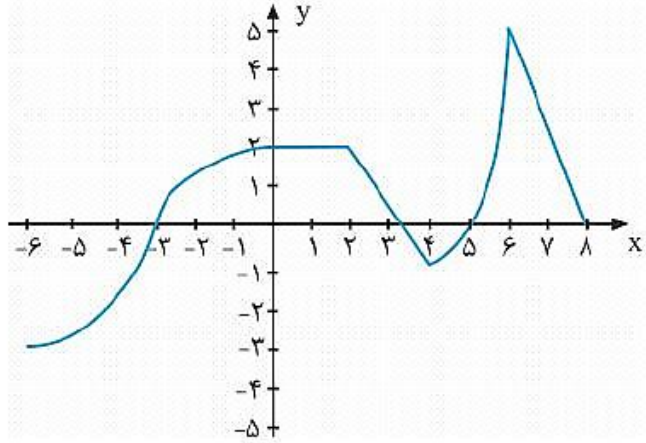
(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



answer

(تمرین کتاب) تابع نمایی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2^x + 2$ رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها توضیح دهید.

answer

(تمرین کتاب) تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a مقدار است؟

answer

(تمرین کتاب) در هر قسمت، موارد فواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{3-2x} \quad ; \quad g(x) = \frac{6}{3x-5} \quad : \quad D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$$

answer

ب) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

$$\text{پ) } f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x} \quad : \quad D_{\text{gof}}, (\text{gof})(x)$$

answer

(تمرین کتاب) اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$

answer

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

answer

پ (اكر ۵ = f(۷) ، ۷ = g(۴) ، ۵ = (fog)(۴) آنگاه

answer

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

answer

$$h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

(تمرین کتاب) تابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

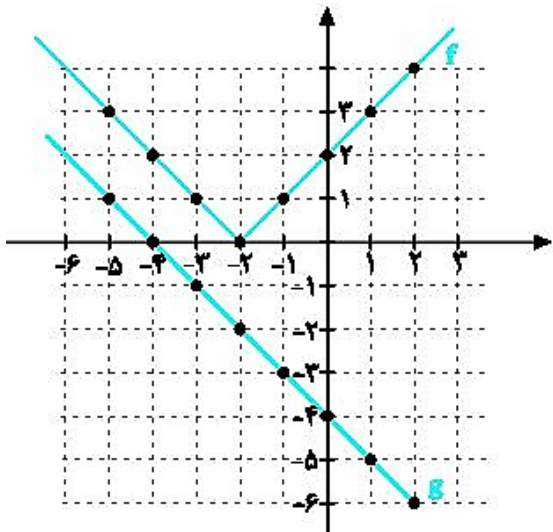
answer

(تمرین کتاب) با توجه به نمودارهای توابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

answer

الف) $(f \circ g)(-1)$

ب) $(g \circ f)(0)$



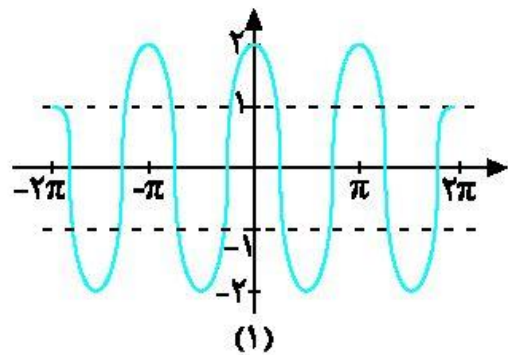
(تمرین کتاب) با توجه به ضابطه‌ی توابع f و g ، معادله مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید.

$$f(x) = 2x - 5 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3x + 8 \quad : \quad (f \circ g)(x) = 7$$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه‌های هر نمودار را مشخص کنید.

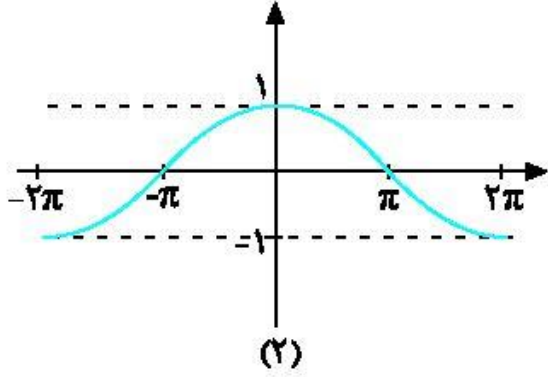
الف)



answer

ب)

answer



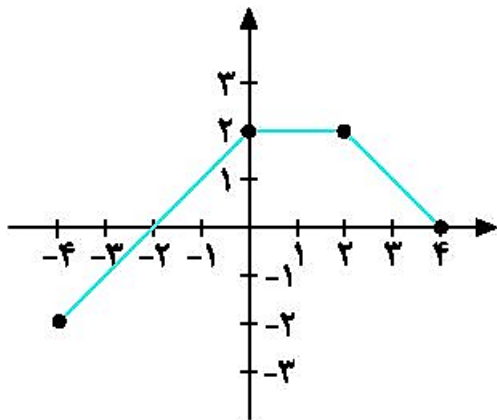
(تمرین کتاب) نمودار تابع $y = -\sin 2x - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

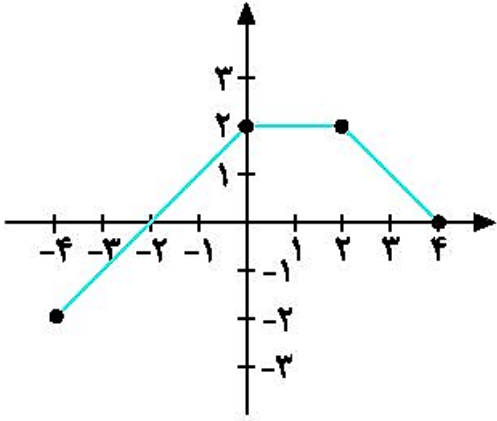
الف) $y = -f(-x) + 2$

answer



$$\text{ب) } y = 2f(x-1) - 3$$

answer



(تمرین کتاب) نشان دهید تابع زیر یک به یک است، سپس فابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

$$g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$$

answer

$f(x) = -\sqrt{x-\lambda}$, $g(x) = \lambda + x^2; x \leq 0$. (تمرین کتاب) نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

answer

(تمرین کتاب) توابع زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید.

$$\text{الف) } f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$$

$$\text{ب) } g(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2$$

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

(الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

answer

$$\text{ب) } (f^{-1} \circ f^{-1})(6)$$

$$g(x) = x^3 \quad f(x) = \frac{1}{8}x - 3$$

answer

$$\text{ب) } (g^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$g(x) = x^3 \quad f(x) = \frac{1}{x} - 3$$

answer

ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. **نهایی ۱۴۰۲**

$$f(x) = -x^2 - 2, x \geq 0.$$

answer

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $[-2, 0]$ باشد. دامنه و برد تابع $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$ را بیابید. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

ریاضیت پامین