



نہایتی فول  
ریاضی



# فصل ١ : مجموعه ، الگو و دنباله

# مجموعه اعداد

۱ اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = 1, 2, \dots$$

۲ اعداد حسابی

$$\mathbb{W} = \mathbb{N} \cup 0 = 0, 1, 2, \dots$$

۳ اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

۴ اعداد گویا

$$\mathbb{Q} = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

۵ اعداد گنگ

$$\mathbb{Q}' = x \mid x \notin \mathbb{Q}$$

اعداد رادیکالی ای که ساده نمیشن یا اعداد اعشاری بدون دوره گردش!

۶ اعداد حقیقی

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

توجه

توجه

$$\mathbb{Q}' \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}'$$

مجموعه اعداد گنگ فقط با مجموعه اعداد حقیقی اشتراک داردا

# بازه و نمایش آن

## نمایش هندسی



## نمایش مجموعه‌ای

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$$

$$[-1, 2]$$

بسته



$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$(-\infty, 2)$$

باز



$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$$

$$[1, 4)$$

نیم‌باز

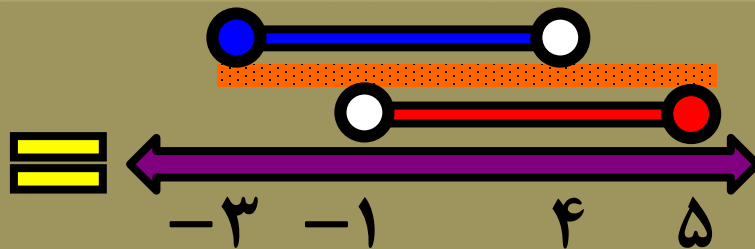


$$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 0\}$$

$$(-3, 0]$$

$\cup = \leftarrow$

$$(-1, 5] \cup [-3, 4)$$

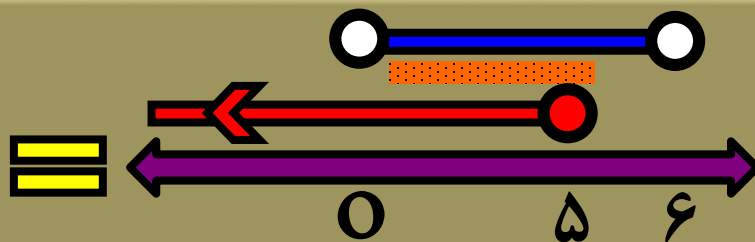


$$[-3, 5]$$

EX

$\cap = \leftarrow$

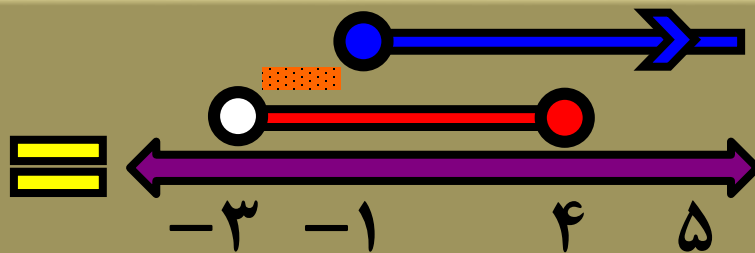
$$(-\infty, 5] \cap (0, 6)$$



$$(0, 5]$$

EX

$$(-3, 4] - [-1, +\infty)$$



$$(-3, -1)$$

EX

مجموعه **متناهی**: مجموعه‌ای است که تعداد اعضایش **قابل شمارش** (عدد حسابی) است. (ته داره‌ا)

مجموعه **نامتناهی**: مجموعه‌ای است که تعداد اعضایش **غیر قابل شمارش** است. (ته ندراره‌ا)

T از بین مجموعه‌های زیر، چندتا متناهی هستند؟

الف) مجموعه‌ی تمامی مدارس شهر تهران

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج چهار رقمی

پ) مجموعه‌ی تمامی اعداد گویایی که صورتشان ۳ است.

ت) مجموعه‌ی تمامی درخت‌های آسیا

ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مربع آنها، حداقل ۳ رقمی است.

(۱) یک

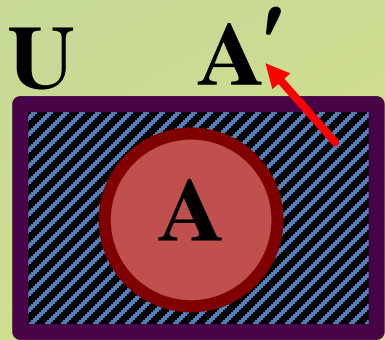
(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

## مجموعه مرجع

در هر سوال یک مجموعه را به عنوان مرجع می‌دهند و با  $U$  نشان می‌دهند. تمام اعضا از  $U$  انتخاب می‌شوند! هر عضوی که از  $U$  نباشد، را انگار نمی‌شناسیم! ( $U$  اول Universal)



**متمم مجموعه A** مجموعه‌ای است که اعضایش در  $U$  هستند و در  $A$

در  $A$  نیستند با  $A'$  نشان می‌دهند.  $U - A = A'$   $U - A' = A$

اگر مرجع را ندهند، اعداد حقیقی را مرجع در نظر می‌گیریم! مثلاً در بازه‌ها مرجع  $R$  است.

توجه

بهترین روش برای بدست آوردن متمم یک بازه، استفاده از محور است.

توجه

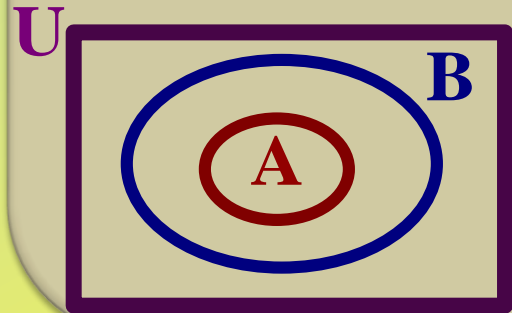
# عملیات جبری مجموعه‌ها در حضور متمم

قانون دمرگان

۱  $(A')' = A$       ۲  $(A \cup B)' = A' \cap B'$  &  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۳  $A \cup A' = U$  &  $A \cap A' = \emptyset$       ۴  $U' = \emptyset$  &  $\emptyset' = U$

۵  $A - A' = A$  &  $A' - A = A'$

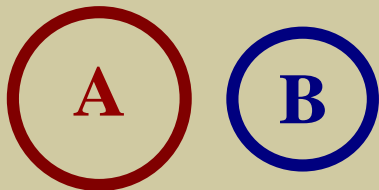


۶ if  $A \subseteq B$

- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$
- $B' \subseteq A'$
- $A - B = \emptyset$



## مجموعه‌های جدا از هم



$$A \cap B = \emptyset \iff A \text{ و } B \text{ جدا از هم هستند}$$

هر مجموعه با متممش جدا از هم‌اند.

&

تعی با هر مجموعه‌ی دلخواه جدا از هم‌اند.

توجه

**T** اگر مجموعه‌ی مرجع را  $Q$  بگیریم، کدام یک از مجموعه‌های زیر حتماً با مجموعه‌ی دلخواه

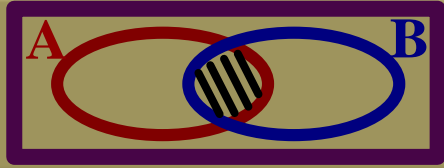
$$A = \{x \mid x^2 + 3x - 4 = 0\} \quad (2) \quad A = \{x \mid x^2 = 2\} \quad (1) \quad B, \text{ جدا از هم هستند؟}$$

$$A = \{5\} \quad (4) \quad A = \{x \mid x^2 = 4\} \quad (3)$$

A

# کلمات کلیدی و تعداد اعضایش

فرض کن دو مجموعه  $A$  و  $B$  تحت شرایط زیر رخ دهند



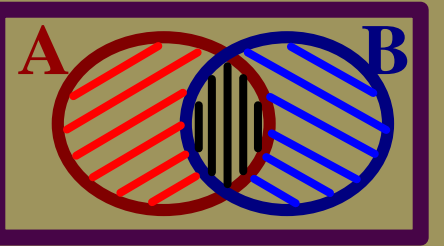
تعداد اعضا

$$n(A \cap B)$$

$$A \cap B$$

$\equiv$

هر دو باهم (=و)



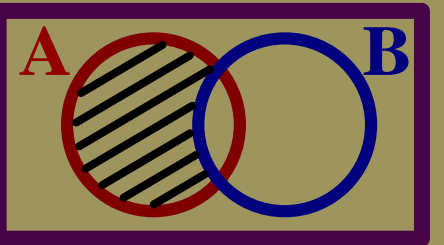
تعداد اعضا

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$A \cup B$$

$\equiv$

حداقل یکی (=یا)



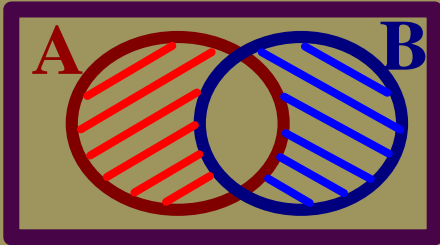
تعداد اعضا

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$A - B = A \cap B'$$

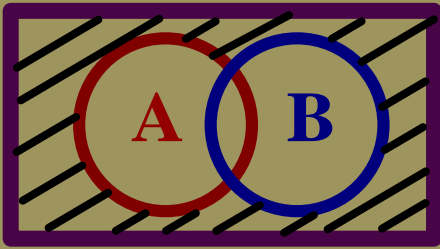
$\equiv$

فقط A



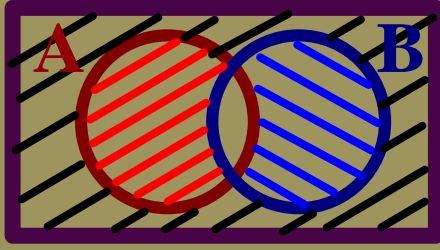
$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \equiv \text{فقط یکی}$$

تعداد اعضا  $\rightarrow = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$



$$(A \cup B)' = A' \cap B' \equiv \text{هیچکدام}$$

تعداد اعضا  $\rightarrow n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$



$$(A \cap B)' = A' \cup B' \equiv \text{حداکثر یکی}$$

تعداد اعضا  $\rightarrow n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$

## نرخ بیکاری

برابر است با نسبت تعداد افراد بیکار در یک جامعه، به تعداد کل افراد آن جامعه. اگر مجموعه  $U$  اعضای جامعه،  $A$

$$\frac{n(A')}{n(U)} \leq \text{داریم؛} \quad \text{افراد شاغل و } A' \text{ افراد بیکار جامعه باشند،}$$

مثال: در یک جامعه آماری، مجموعه افراد شاغل ۶۴ عضو بیشتر از مجموعه افراد بیکار دارد. اگر این جامعه به طور کلی ۹۶ عضو تشکیل شده باشد، نرخ بیکاری این جامعه چند درصد است؟

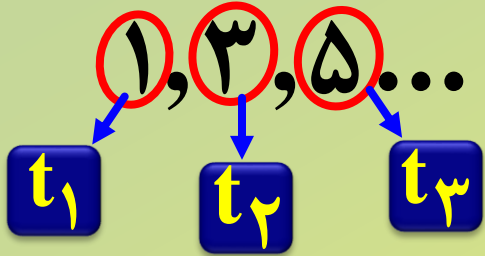
answer

مثال: (کار در کلاس کتاب) در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال می‌باشند و ۵ نفر عضو هیچکدام نیستند. چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم می‌باشند؟

**answer**

## دنباله

شدهای از اعداد کنار هم، را یک دنباله می‌گوییم.



## جمله عمومی

جمله‌ی عمومی یک دنباله (مثلاً  $t_n$ )، ریخت کلی دنباله، را نشان می‌دهد.

**ex** if  $a_n = \frac{n^2}{n+1} \Rightarrow a_4 + a_9 = ?$

**ex**  $a_{3n-1} = \frac{\sqrt{n}}{n-2} \Rightarrow a_5 \& a_{11} = ?$

$$t_n = an + b$$

دنباله‌ای است با جمله عمومی درجه ۱ بر حسب  $n$ !

دنباله خطی

T

در یک دنباله خطی، جمله سوم برابر ۲۹ و جمله نهم ۹۵ است. جمله دوم این دنباله کدام است؟

۱۵(۴)

۲۹(۳)

۱۸(۲) ✓

۷(۱)

A

$$t_n = an^2 + bn + c$$

دنباله‌ای است با جمله عمومی درجه ۲ بر حسب  $n$ !

دنباله درجه دو

در دنباله درجه دوم  $5, 8, 13, \dots$  جمله هشتم کدام است؟ (۱) ۸۲ (۲) ۶۸ ✓ (۳) ۴۶ (۴) ۷۴

T

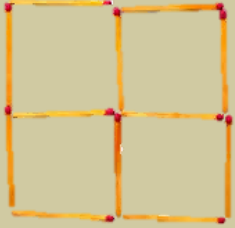
A



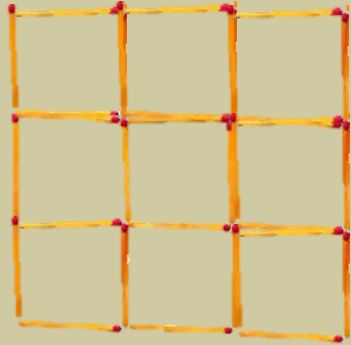
# الگوی هندسی دنباله‌ها

هر جمله یک دنباله را می‌توان با تعدادی نقطه یا خط هم نشان داد

با نگاه به شکل و دقت به شماره‌اش، می‌توان الگویی برای دنباله و شکل‌های بعرضش را حدس زد.



$$a_1 = 2^2$$



$$a_2 = 3^2$$

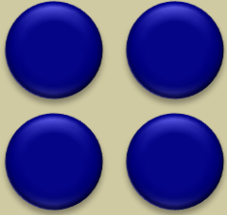
...

$$a_n = (n+1)^2$$

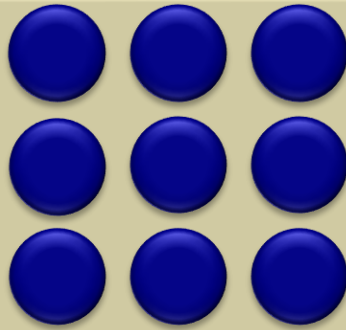
## دنباله مربعی



$$t_1 = 1^2 = 1$$



$$t_2 = 2^2 = 4$$



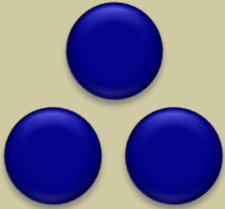
$$t_3 = 3^2 = 9$$

$$t_n = n^2$$

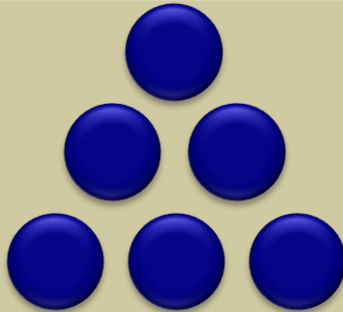
## دنباله مثلثی



$$t_1 = 1$$



$$t_2 = 1 + 2 = 3$$

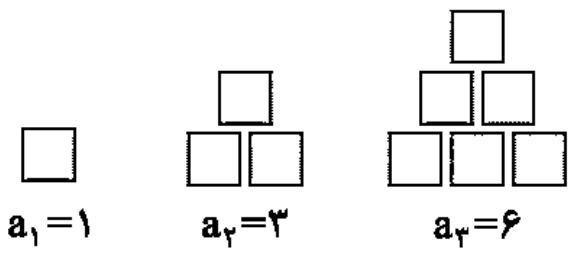


$$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: (کار در کلاس) الگوی مقابل را در نظر بگیرید. جمله ششم آن را بدست بیاورید. سپس جمله عمومی دنباله مربوط به این الگو را بیابید. آیا دنباله حاصل قطعی است؟

**answer**



## دنباله‌ی حسابی

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 = a_1 + d \xrightarrow{+d} a_3 = a_1 + 2d \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$d > 0$  → صعودی  
۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

$d < 0$  → نزولی  
۴, ۱, -۲, -۵, ...

$d = 0$  → ثابت  
۴, ۴, ۴, ...

## واسطه‌ی حسابی

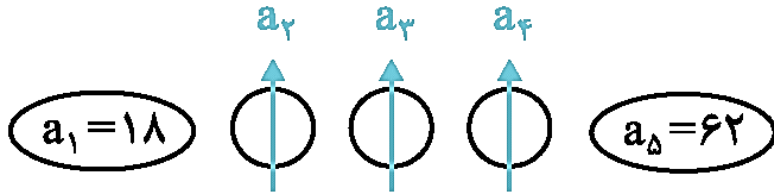
$c$        $b$        $a$

(سه جمله متساوی‌الفاصله از یک دنباله حسابی)

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$b$  واسطه حسابی  
جملات کناریشه!

مثال: (کار در کلاس) بین اعداد ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان درج کنید که ۵ عدد حاصل تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.



**answer**

## دنباله هندسی

$$a_1 \xrightarrow{\times q (q \neq 0)} a_2 = a_1 q \xrightarrow{\times q} a_3 = a_1 q^2 \rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$$

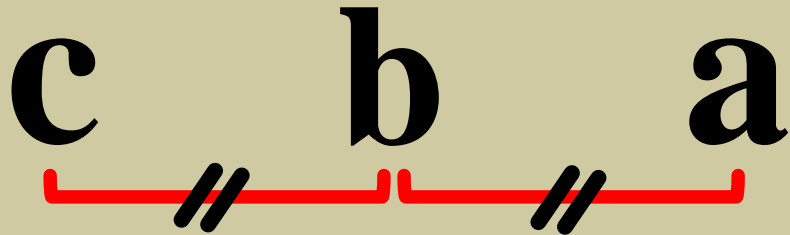
$q > 1$  → صعودی  
۳, ۹, ۲۷, ...

$q = 1$  → ثابت  
۳, ۳, ۳, ...

$0 < q < 1$  → نزولی  
۴, ۲, ۱,  $\frac{1}{2}$ , ...

$q < 0$  → غیر یکنوا  
۱, -۲, ۴, ...

## واسطه هندسی



(۳ جمله متساوی الفاصله از یک دنباله هندسی)

$$b^2 = a.c$$

$b$  واسطه هندسی  
جملات کناریش!

مثال: اگر  $2x$ ،  $2x+1$  و  $2x-1$  به ترتیب ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت آن کدام است؟

**answer**

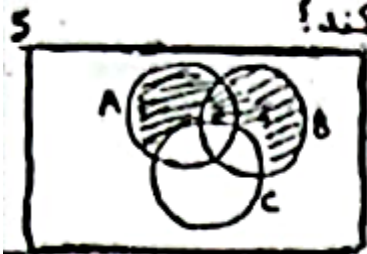
# حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

بین دو عدد  $\frac{1}{2}$  و ۲۵۶ هشت عدد نوشته‌ایم به طوری که ۱۰ جمله حاصل جملات متوالی یک دنباله

هندسی‌اند قدر نسبت دنباله را بیابید.  $(a_1 = \frac{1}{2})$  **امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲**



د) اگر A و B و C پیشامد از فضای نمونه S باشد شکل روبرو کدام پیشامد را معلوم می‌کند؟



(۱) C رخ ندهد

(۲) A و B رخ دهد اما C رخ ندهد.

(۳) A و B و C همزمان رخ ندهند

(۴) A یا B رخ دهد اما C رخ ندهد.

**امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲**

گزینه مناسب را انتخاب کنید. **امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲**

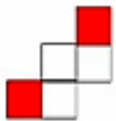
حاصل  $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$  برابر است با:

الف)  $[2, 6)$  ب)  $(-\infty, 9)$  ج)  $(2, 6]$  د)  $(2, 6)$

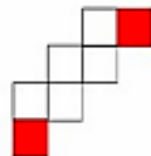
مطابق الگوی زیر، چند مربع سفید در مرحله ی ۲۱ ام خواهیم داشت؟ **امتحانات تیزهوشان ۱۴۰۲**



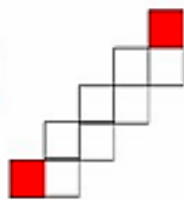
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

(تمرین کتاب) متاهی یا ناممتاهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی

ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۳۶

پ) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ت)  $A = \{x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰

(تمرین کتاب) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه  $A$  متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

(تمرین کتاب) در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر از آن‌ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B فرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنها نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو شرکت فرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست‌کم از یکی از این دو شرکت فرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A فرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت فرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت فرید نکرده‌اند؟

تمرین کتاب) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف) شکل بعدی را رسم کنید.



ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

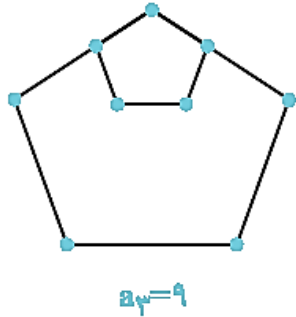
(تمرین کتاب) در یک جمله دنباله حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳ و مجموع ۳ جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

**answer**

(تمرین کتاب) الف) جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

answer

$$a_1 = 1$$



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله پنجم آن دنباله ۳۹۷ است؟



(تمرین کتاب) علی دوپرفه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت آن هر سال، ۲۰ درصد نسبت به سال قبل افت می‌کند.

الف) اگر پس از ۳ سال قصد فروش دوپرفه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوپرفه پس از گذشت  $n$  سال از چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟

**answer**

(تمرین کتاب) جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

**answer**

(امتحانات سال گذشته) فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند که

$$n(A \cap B) = 25, \quad n(B) = 50, \quad n(A) = 70, \quad n(U) = 120.$$

ج)  $n(A \cap B')$

ب)  $n(A' \cap B')$

الف)  $n(A \cup B)$  مطلوب است؛

**answer**

(امتحانات سال گذشته) بین دو عدد ۳ و ۱۶۳ چهار عدد طوری قرار دهید که دنباله حسابی تشکیل شود.

**answer**

(امتحانات سال گذشته)  $a_n$  و  $b_n$  دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله دنباله  $a_n$

برابر  $k$  است.  $k$  و  $b_k$  را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, \dots \\ b_n = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

**answer**