حسابان ۱

فصل ۱ :
جبر و معادله
(۱۰ نمره)

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n از رابطه روبرو به دست می‌آید: $۱+۲+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

مثال کتاب: روی محیط دایر ه ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

answer

مجموع n جمله دنباله حسابی:

فرمول ۱: زمانی که جملات اول و آخر (a_n, a_1) را داشته باشیم از این فرمول استفاده می‌کنیم

$$\Leftarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_n + a_1)}$$

فرمول ۲: اگر در همان فرمول ۱، بجای a_n بگذاریم $a_n = a_1 + (n-1)d$ خواهیم داشت

$$\Leftarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$

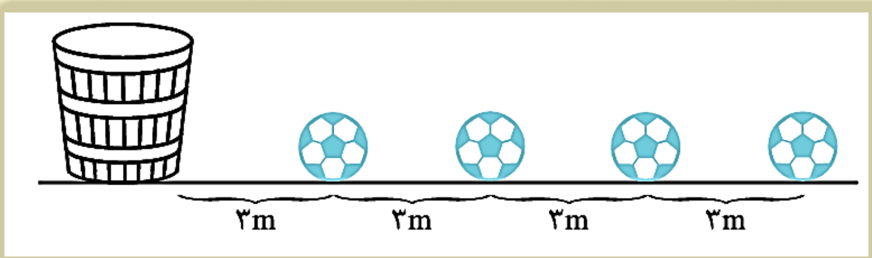
از این فرمول زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول (a_1) و قدر نسبت (d) را داشته باشیم.

مثال: (کار در کلاس)

مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب) در یک مسابقه، تعداد بسیاری توپ روی خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی برود و آن را بردارد و به داخل سبد بیاندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید جمعا چند توپ در سبد انداخته است.



answer

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

مثال: (مثال کتاب) برای محافظت از تابش خطرناک، لایه‌های محافظتی استفاده می‌شود که شدت پرتوها را در هر بار عبور نصف می‌کند. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۷ درصد کاهش یابد؟

answer

معادلات درجه دوم

مثال: (کار در کلاس) اگر $x = -۱$ یک ریشه معادله $۴x^۲ - mx - ۷ = ۰$ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

answer

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

در $ax^2 + bx + c = 0$ داریم: (با شرط $\Delta > 0$)

نکته: برعکس نکته قبل هم داریم! اینکه اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ آنگاه

α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

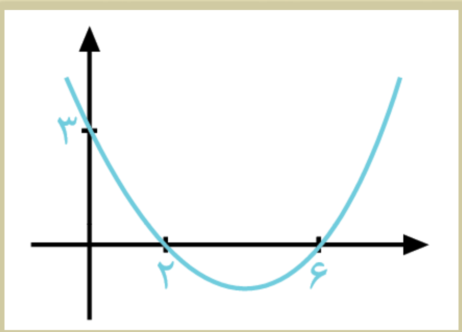
مثال: (مثال کتاب) محیط یک مستطیل ۳۳ سانتیمتر و مساحت آن ۶۵ سانتیمتر مربع است. ابعاد مستطیل را بیابید.

answer

صفرهای تابع

برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌گوییم. به لحاظ نموداری، صفرهای تابع f همان طول نقاط تلاقی نمودار f و محور Xها است.

مثال: (مثال کتاب) اگر نمودار سهمی $\mathbf{y=ax^{2}+bx+c}$ به صورت زیر باشد، ضابطه سهمی را مشخص کنید.



answer

مثال: (کار در کلاس)

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر (۲-) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

answer

مثال: (مثال کتاب)صفرهای تابع $\mathbf{f}$ با ضابطه $\mathbf{f(x)=(x^{۲}-۱)^{۲}+(x^{۲}-۱)-۲}$ را به دست آورید.

answer

روش هندسی حل معادلات

اگر $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ دو تابع باشند، جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ ، طول نقاط برخورد $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ می‌باشد. این روش حل را که از طریق آن، تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها (و گاهی دقیق) بدست می‌آید، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

مثال: (مثال کتاب) به روش هندسی، معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

answer

معادلات گویا و رادیکالی

عبارت گویا: یک عبارت کسری که صورت و مخرجش چندجمله‌ای است.

مثلا $\dfrac{۲x^{۲}-۱}{۴x^{۲}-۵x+۱}$ یک عبارت گویاست.

معادلات گویا: گونه‌ای از معادلات است که از جمع و تفریق چند عبارت گویا تولید می‌شود.

روش حل معادلات گویا

همه‌ی عبارات را به یک سمت می‌بریم، طوری که مساوی صفر شوند. بعد بین همه‌ی آن‌ها مخرج مشترک می‌گیریم، این‌گونه عبارت تبدیل به یک کسر به فرم $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=۰$ می‌شود. می‌دانیم کسری مساوی صفر است که صورتش صفر باشد، در نتیجه باید $P(x)=۰$. در انتها جواب‌ها را در مخرج چک می‌کنیم که مخرجی را صفر نکنند.

مثال: (مثال کتاب) در یک مغازه ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته. او چگونه می‌تواند غلظت محلول را به ۷ درصد برساند؟ (مسئله را در دو حالت وجود نمک به اندازه کافی و عدم وجود نمک به اندازه کافی حل کنید.)

answer

مثال: (مثال کتاب) معادله $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

answer

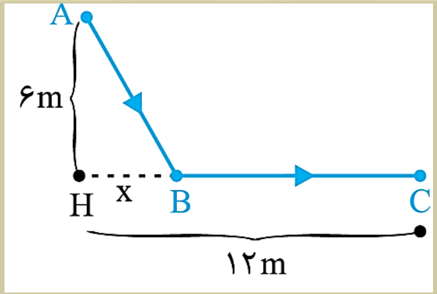
معادلات گنگ

برخی از معادلات که دارای عبارات رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامیم. برای حل آنها، ابتدا سعی می‌کنیم رادیکال را در یک طرف تنها کنیم، بعد طرفین را به توان فرجه رادیکال برسانیم و در صورت لزوم این عمل را تکرار کنیم تا به معادله‌ای بدون رادیکال برسیم. جواب‌های بدست آمده را حتما در معادله اصلی (اونیکه هنوز به توان نرسوندیم) چک کنید، زیرا گاهی عملیات توان‌رسانی، جواب‌های اضافی تولید می‌کنند.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\sqrt{x+۲}-x=-۴$ را حل کنید.

answer

مثال: (مثال کتاب) یک مرغ دریایی در آسمان در نقطه قرار دارد و با قصد شکار ماهی در نقطه ، روی آب، ابتدا از نقطه تا در هوا، فرود می‌آید، سپس از تا ، روی آب و به صورت افقی پرواز می‌کند تا به برسد. اگر برای طی هر متر در هوا، ۱۴ کیلو کالری و روی آب، ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند، در چه فاصله‌ای از باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



answer

قدر مطلق

یک تابع مثبت‌ساز است و طبق تعریف داریم:

مثال: (کار در کلاس کتاب) عبارت‌های $A=\sqrt{a^4+2a^2+1}$ و $B=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

answer

مثال: (مثال کتاب) نمودار $\mathbf{f}$ تابع با ضابطه $\mathbf{f(x)=|x-1|+|x+2|}$ را رسم کنید.

answer

ویژگی‌های قدرمطلق

① $|x| \geq ۰$

② $|x| = a \Leftrightarrow x = a \quad \text{or} \quad x = -a \ (a \geq 0)$

③ $|-x| = |x|$

④ $\sqrt{x^{۲}} = |x|$

⑤ $|x|^{۲} = x^{۲}$

⑥ $(\sqrt{x})^{۲} = x$

⑦ $|ab| = |a||b|$

⑧ $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

⑨ $-|a| \leq a \leq |a|$

⑩ $|a + b| \leq |a| + |b|$

⑪ $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

⑫ $|x| \geq c \Leftrightarrow x \geq c \quad \text{or} \quad x \leq -c$

مثال: (مثال کتاب) معادله $|۳x - ۲| = |x - ۴|$ را حل کنید.

answer

رسم نمودار $y=|f(x)|$

کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، قرینه نمودار $f(x)$ را به صورت آینه‌وار نسبت به محور x ها رسم کنیم.

مثال: (کار در کلاس) به روش هندسی، معادله $|2x-1|=|x^2-1|$ را حل کنید و تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها را بیابید.

answer

فاصله دو نقطه $A\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right.$ از هم

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB ($A\left|\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right.$)

$$M\left|\begin{matrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{matrix}\right.$$

مثال: (مثال کتاب) معادله عمود منصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطه $A\left|\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right.$ را به‌هم وصل کرده است.

آیا نقطه $P\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right.$ روی عمودمنصف **AB** قرار دارد؟

answer

فاصله نقطه $A\left|\begin{array}{l}x_{0}\\ y_{0}\end{array}\right.$ **از خط** $ax+by+c=0$

$$AH=\frac{|ax_{0}+by_{0}+c|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$$

مثال: (مثال کتاب) فاصله نقطه $\mathbf{A(1,-4)}$ از خط $\mathbf{8x+6y=k}$ برابر ۴ است. مقدار چقدر است؟

answer

مثال: (کار در کلاس) اگر نقطه $A(۲,۳)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $۳x - ۴y = ۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

answer

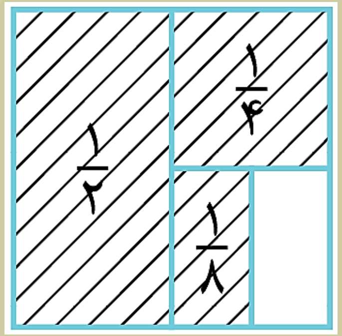
۱- (تمرین کتاب) در دنباله حسابی $۵,۸,۱۱,...$ حداقل چند جمله از آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

answer

۲- (تمرین کتاب) مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب ۶ هستند چقدر می‌شود؟

answer

۳- (تمرین کتاب) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



answer

۴- (تمرین کتاب) صفرهای تابع $f(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۳x$ را در صورت وجود به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب) معادله روبه رو را حل کنید. $(\frac{x^۲}{۳} - ۲)^۲ - ۷(\frac{x^۲}{۳} - ۲) + ۶ = ۰$

answer

۶- (تمرین کتاب) تعداد ریشه‌های معادله $x^۲ - x - ۱ = |x - ۱|$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

answer

۷- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{۳y+۵}{y^{۲}+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$$

answer

$$\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$$

answer

$$\sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴$$

answer

۸- (تمرین کتاب) ماشین $\mathbf{A}$ کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین $\mathbf{B}$ انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

answer

۹- (تمرین کتاب) با استفاده از تعیین علامت، ضابطه تابع $\mathbf{f(x)=|x-۱|+|x+۱|}$ را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

answer

$$\frac{٢ - x}{|x - ٣|} = ١$$

answer

$$\sqrt{x^{٢} - ٢x + ١} = ٢x + ١$$

answer

۱۱- (تمرین کتاب) نمودار تابع $f(x)=\left||x|-۲\right|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=۱$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل نمایید.

answer

۱۲- (تمرین کتاب) $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) خط $۴x+۳y=۵$ بر دایره C به مرکز مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

answer

۱۴- (تمرین کتاب) اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

answer

۱۵- (تمرین کتاب) نقطه‌های روی خط $y = ۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدا مختصات و تا نقطه‌ی $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

answer

۱۶- یک دنباله هندسی غیر یکنوا هشت جمله دارد. مجموع مجذورات چهار جمله اول آن چقدر است؟

answer

۱۷- (امتحانات سال گذشته) در معادله $۲x^۲ - ۸x + m = ۰$ ، اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، m و هر دو جواب معادله را بیابید.

answer

۱۸- (امتحانات سال گذشته) محیط یک زمین مستطیل‌شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

۱۹- (امتحانات سال گذشته) در یک دنباله هندسی غیرثابت، جمله اول آن، نصف مجموع دو جمله بعدی است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

answer

۲۰- (امتحانات سال گذشته) در یک دنباله هندسی، مجموع ده جمله اول ۳۳ برابر مجموع ۵ جمله اول است. قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

answer

۲۱- (امتحانات سال گذشته) مساحت مربعی را بیابید که یک راس آن $A(-۱,۳)$ و $۳x-۴y+۱=۰$ معادله یک ضلع آن است.

answer

فصل ۲ :

تابع

(۸ نمره)

خب حتما می‌دونید که برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم دامنه و ضابطه‌ای از تابع که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم دامنه را نشان می‌دهد، معلوم باشد.

در فرم $\begin{cases} S: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ مجموعه A دامنه تابع است. اما مجموعه B هم دامنه است نه برد. برد زیر مجموعه‌ای از هم دامنه است. در واقع می‌گویند هم دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

مثال: (کار در کلاس با تغییر) برای تابع $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟

الف) $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

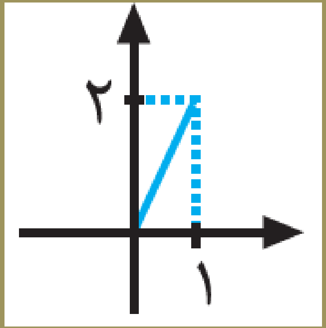
ب) $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to[0,\infty) \\ f(x)=x \end{cases}$

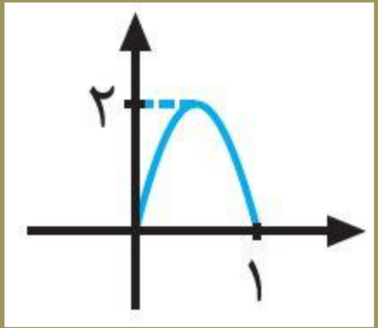
ج) $\begin{cases} f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to\left[0,\frac{1}{5}\right] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

د) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

شروط تساوی دو تابع :

نکته: هر دو تابع مساوی حتما دارای دامنه و برد مساوی هستند، اما هر دو تابعی که دامنه و برد مساوی داشته باشند صرفا مساوی نیستند. مثلا دو تابع روبه‌رو را ببینید، دامنه هر دو $[0,1]$ و برد هر دو $[0,2]$ است. اما نمودار آن‌ها روی هم منطبق نیست و مساوی نیستند!





مثال: (کار در کلاس)

در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر با هم برابرند؟

۱	$f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$	$g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$
۲	$f=\{(a,b),(c,d)\}$	$g=\{(c,d),(a,b)\}$
۳	$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۳x \end{cases}$	$\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=۳x \end{cases}$
٤	$f(x)=x\lvert x\rvert$	$g(x)=x^{۲}$
٥	$f(x)=۴x$	$g(x)=\frac{۸x}{۲}$

مثال: آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^{۲} - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x - ۱} \end{cases}$$

answer

آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا: تابعی که ضابطه‌اش به‌صورت $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد به طوری که $Q(x)$ و $P(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(x)\neq ۰$

مثلا توابعی نظیر $y=x^۲$ ، $y=\frac{x-۱}{x}$ ، $y=۲$ ، $y=\sqrt{۵}x$ ، $y=\frac{x^۲-۱}{x^۴+۵x+۲}$ و ... گویا هستند.

دامنه توابع گویا: می‌شود همه اعداد حقیقی، به غیر از آن‌ها که مخرج کسر را صفر می‌کنند.

مثال: عبارت زیر را کامل کنید.

چون مخرج کسر $\frac{۱}{x}$ نمی‌تواند .... باشد، پس .... نمی‌تواند در دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\frac{۱}{x}$ باشد، بنابراین نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ محور .... را قطع نمی‌کند.

مثال: (کار در کلاس)

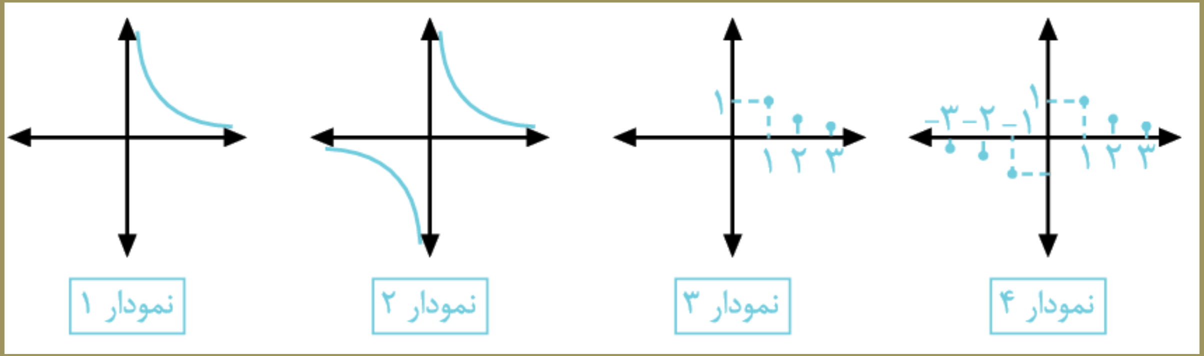
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

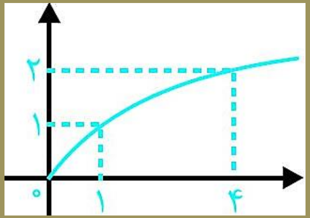
پ) $\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$

ت) $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$



توابع رادیکالی

در کتاب درسی فقط توابع رادیکالی با درجه ۲ زیر ذره‌بین برده شده که دامنه آن‌ها مقادیری از x است که زیر رادیکال را نامنفی (بزرگ‌تر مساوی صفر) کند. ساده‌ترین تابع رادیکالی $y=\sqrt{x}$ است که دامنه آن مقادیر بازه $[0,\infty)$ است. نمودار آن که به نمودار اَبرویی معروف است به صورت روبه‌رو است.



روش رسم توابع رادیکالی به فرم $y=\sqrt{ax+b}$ ؛ دامنه‌اش را مشخص کن، سپس یک ابرو در دامنه‌اش رسم کن.

مثال: نمودار $\mathbf{y=-2\sqrt{-x+1}+3}$ را رسم کنید.

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. یک رابطه می‌تواند یک تابع را مشخص کند، مانند $y = x^2$ که به ازای هر x ، یک y تحویل ما می‌دهد. همچنین یک رابطه می‌تواند یک تابع نباشد، مانند $y^2 = x$ (مثلا به ازای $x = ۴$ ، دو مقدار برای y بدست می‌آید.)

تو امتحانت اگر دیدی که y ، توانش زوجه یا داخل قدرمطلقه، تابع نیست! (۹۹/۹%) واسه اینکه رد کنی تابع بودنش رو، کافیه یه مقدار به x بدی و نشون بدی y ۲ تا مقدار می‌گیره.

مثال: (کار در کلاس) کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + ۱$

ب) $x = |y| + ۱$

تابع پله‌ای

به تابعی که دامنه آن را بتوان به صورت تعدادی بازه جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در برد نسبت داد، تابع پله‌ای می‌گویند. (به عبارت دیگر در هر بازه از دامنه آن‌ها، یک تابع ثابت وجود دارد.)

مثلا $y=\begin{cases} -۱ & -۲<x<-۱ \\ ۲ & ۰\le x<۴ \\ ۱ & ۴\le x<۶ \end{cases}$ یک تابع پله‌ای است.

مشهورترین تابع پله‌ای تابع جزء صحیح است. تعریفش را ببینید:

تابع جز صحیح (تابع براکت): جزء صحیح هر عدد می‌شود اولین عدد صحیح کوچک‌تر از خودش. این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود. به طور مثال :

$[-۴/۳]=-۵ \quad [۵/۹]=۵ \quad [۳/۱]=۳ \quad [-۴/۹]=-۵$

نکته: جزء صحیح یک عدد صحیح می‌شود خودش.

مثال: اگر $f(x)=[x+۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲-\sqrt{۲})$ برابر .... است.

مثال: (تمرین کتاب) تابع $f(x)=[x]+۲$ را رسم کنید.

answer

مثال: (کار در کلاس با تغییر)

نمودار تابع $f(x)=[۳x]+۱$ را در بازه $\left[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}\right]$ رسم کنید.

answer

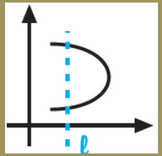
وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

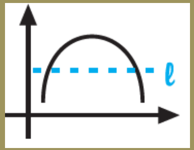
تعریف یک‌به‌یک بودن **f** از روی زوج مرتب؛ تابع **f** زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی بردهای (**y**های) برابر نداشته باشند. اگر برد آن‌ها برابر باشد، باید دامنه آن‌ها نیز برابر باشد!

مثلا $f=\{(۱,۲)(۴,۲)\}$ تابع است (چون دامنه آن‌ها متفاوت است) اما یک‌به‌یک نیست. مثلا $f=\{(۱,۲)(۱,۳)\}$ اصلا تابع نیست که بخواهد یک‌به‌یک باشد یا خیر! دقت کنیم که یک‌به‌یک بودن از ویژگی‌های یک تابع است.

اما در مثال $h=\{(۱,۲)(۳,۴)\}$ ، **h** تابع است. یک تابع یک به یک. مثلِ یک مرد!!

تشخیص یک به یک از روی نمودار

هر خط موازی محور Xها، باید نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. مثلا 

تابع نیست که بخواهد یک به یک باشد. (خط l نمودار بزرگوار را در دو نقطه قطع کرده!) مثلا 

تابع است اما چون خط l موازی محور Xها) نمودارش را در ۲ نقطه قطع کرده دیگر یک به یک نیست، اما  مربوط به تابعی یک به یک است.

وارون تابع f

اگر وارون f (معکوس f)، خود تابع یک باشد، f را وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) می‌نامیم و معکوس f را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

حال سوال اینجاست که چه زمانی f معکوس‌پذیر است؟

شرط وارون‌پذیری f : تابع f وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

معکوس کردن f از روی زوج مرتب: کافی است جای مولفه‌های طول و عرض زوج مرتب‌ها را عوض کنید.

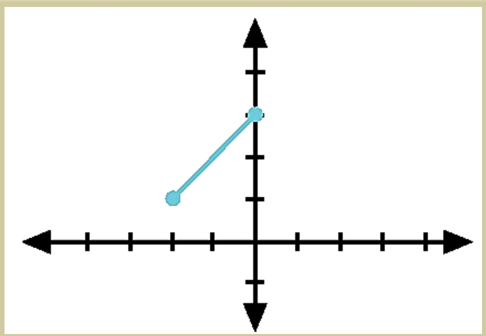
به‌دست آوردن نمودار f^{-1}: گفتیم اگر f یک به یک باشد، معکوس‌پذیر است و نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند.

نتیجه: $\boxed{R_f = D_{f^{-1}}}$ و $\boxed{D_f = R_{f^{-1}}}$

مثال: تابع وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

answer

$$\{(۲,۳)(-۲,۱)(-۱,۲)\}$$



answer

بدست آوردن ضابطه‌ی وارون تابع f

ابتدا به جای $f(x)$ ، نماد **y** قرار می‌دهیم. سپس سعی می‌کنیم (در صورت امکان) **x** را برحسب **y** بنویسیم.

(**x**را تنها می‌کنیم!) در آخر به جای **x** ، $f^{-1}(x)$ یا y^{-1} و به جای **x** ، **y** قرار می‌دهیم.

مثلا می‌خواهیم وارون تابع $f(x)=2x+\frac{1}{3}$ را به‌دست بیاوریم! چون نمودار این تابع خطی، صعودی است، پس هر خط موازی محور **x**ها، نمودارش را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه **f** یک به یک است. پس وارون‌پذیر نیز هست. بقیه راه حل را ببینید!

مثال: نشان دهید که وارون تابع داده شده، یک تابع درجه دوم است. $\mathbf{f(x)=3-\sqrt{x}}$

answer

مثال: (کار در کلاس)

اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، ضابطه $f^{-۱}$ و دامنه و برد f و $f^{-۱}$ را بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب)

نشان دهید تابع $g(x) = x^{2} - 2x + 3$ وارون‌ناپذیر است. سپس دامنه آن را طوری محدود کنید که در دامنه جدید، یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر باشد.

answer

اعمال جبری روی توابع، رسم نمودار توابع

۱- جمع $((f+g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را با هم جمع کنیم، $\leftarrow f(x)+g(x)$ ؛ دامنه این تابع می‌شود $D_f \cap D_g$.

۲- تفریق $((f-g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را از هم کم کنیم، $\leftarrow f(x)-g(x)$ ؛ دامنه این تابع می‌شود $D_f \cap D_g$

۳- ضرب $((f.g)(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را در هم ضرب کنیم، $\leftarrow f(x)\times g(x)$ ، دامنه این تابع می‌شود $D_f \cap D_g$

۴- تقسیم $((\frac{f}{g})(x))$: یعنی ضابطه دو تابع را بر هم تقسیم کنیم، $\leftarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ ، دامنه این تابع می‌شود .

$$D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

مثال: دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه توابع $f \pm g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید!

answer

مثال: توابع $f(x)=۳-x^{۲}$ و $g(x)=-۲$ داده شده‌اند.

الف) نمودار تابع $g+f$ را رسم کنید. (راه حل نوشته شود.) ب) مقدار $(f.g)(۰)$ را محاسبه کنید.

answer

ترکیب دو تابع f و g

$$fog(x)=f(g(x)) \quad \text{و} \quad gof(x)=g(f(x))$$

نکته: حواست باشه تو محاسباتت باید به‌جای حرف o، پرانتز بزاری. مثلا $fogoh(۳)$ یعنی $f(g(h(۳)))$.
محاسباتت رو از داخل شروع کن. تو همین مثال، اول $h(۳)$ رو حساب کن! مثلا میشه **k** بعد $g(k)$ رو حساب کن! مثلا میشه **m** در آخر هم $f(m)$ حساب شه!

دامنه تابع مرکب

$$D_{fog}=\left\{x \mid \overset{(۱)}{\boxed{x\in D_g}} \;,\; \overset{(۲)}{\boxed{g(x)\in D_f}}\right\} \qquad D_{fog}=\left\{\overset{(۱)}{\boxed{x\in D_g}} \;\middle|\; \overset{(۲)}{\boxed{g(x)\in D_f}}\right\}$$

که این دو هیچ فرقی با هم ندارن!

نکته: دامنه تابع رو همیشه از راه تعریف (که الان گفتم) به دست بیارید نه از روی ساختن ضابطه!

مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=2x^2-1 \leftarrow$ دامنه و ضابطه $fog(x)$ ؟

answer

ب) $f(x) = \frac{۲}{x-۱} \leftarrow$ دامنه و ضابطه $fof(x)$ ؟

answer

مثال: توابع $f=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۵,۶)\}$ مفروضند. تابع gof را به دست آورید.

answer

۱- (تمرین کتاب) کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم دامنه تابع، زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن، بازه است.

answer

۲- (تمرین کتاب) دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{۲x + ۳}{x^{۲} + x - ۱۲}$$

answer

$$f(x) = \sqrt{۸ - x}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع زیر را رسم نموده، دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

$$f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$$

answer

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$$

answer

۴- (تمرین کتاب) نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$f(x)=[x]+۱ \quad , \quad -۲\le x<۳$$

answer

$$f(x)=\left[\frac{۱}{۲}x\right] \quad , \quad -۴\le x<۴$$

answer

۵- (تمرین کتاب) به کمک رسم نمودار، وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست آورید.

$$f(x) = (x+۵)^{۲} \quad , \quad x \geq ۵$$

answer

$$f(x) = -|x-۱|+۱ \quad , \quad x \geq ۲$$

answer

$f(x) = (x - ٣)^{٢}$

answer

$f(x) = \sqrt{x + ٢} - ٣$

answer

۶- (تمرین کتاب) وارون تابع $f(x)=\frac{-۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار و وارون آن را رسم کنید.

answer

۷- (تمرین کتاب) برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع **fog** و دامنه آن را به دست آورید.

answer

۸- (تمرین کتاب) اگر $f=\{(-۴,۱۳)(-۱,۷)(۰,۵)(\frac{۵}{۲},۰)(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷)(-۲,-۵)(۰,-۳)(۳,۰)(۵,۲)(۹,۶)\}$

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

ابتدا دامنه را محاسبه کنید،سپس عمل بعدی مربوطه را روی بردار اعمال کنید.

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۲$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که

$$(fog)(x)=x^{۲}-۴x+۵$$

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴)(۳,۲)(۵,۶)(۸,۰)\}$ دو تابع باشند؛

الف) تابع fog را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید. ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) آیا دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳}$ با هم مساوی‌اند. چرا؟

answer

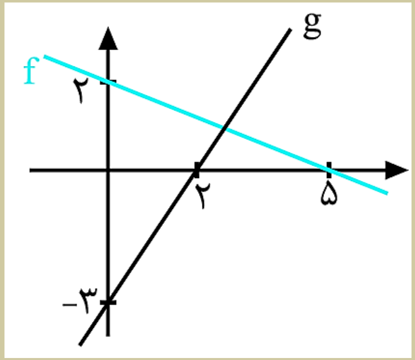
۱۲- (امتحانات سال گذشته) دو تابع $f = \{(۲,۵)(۶,۳)(۳,۷)(۴,۱)(۱,۹)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-۱}$ مفروض اند.

اگر $f^{-۱}(g(۲a)) = ۶$ باشد، a را به دست آورید.

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) نمودار توابع **f** و **g** داده شده‌اند، ضابطه توابع و را به دست آورید.

answer



توابع نمایی و لگاریتمی

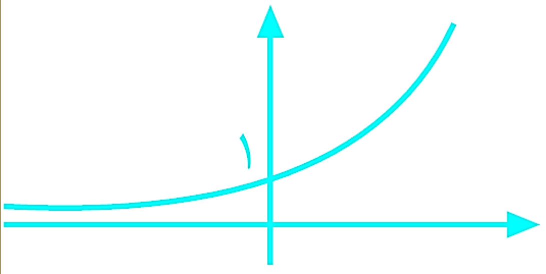
توابع نمایی

تعریف تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $y=a^x$ که $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ و $a\neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود،

مانند: $y=(\frac{1}{2})^x$ ، $y=(\sqrt{2})^x$ و ...

حالت اول : $a>1$ اگر پایه بزرگ‌تر از یک باشد، با افزایش a مقدار تابع، یعنی $y=a^x$ افزایش می‌یابد،

و نمودار حالت صعودی اکید خواهد داشت.



برخی ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است. (چون هر خط موازی محور **X**ها نمودارش را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.)

۲- عرض از مبدأ (یعنی محل عبور نمودار از محور **y**ها) این نمودار یک است. (شما به **X**بده صفر) $\Leftarrow y = a = ۱$

۳- این نمودار همیشه بالای محور **X**هاست و به ازای $x \in \mathbb{R}$ ، $a^x > ۰$

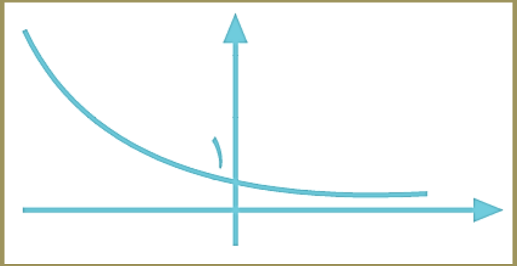
۴- همان‌گونه که می‌بینید، این تابع هیچ محدودیتی برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش $\mathbb{R}$ است. اما خروجی آن همان‌طور که گفتیم فقط مقادیر مثبت را تولید می‌کند. پس برد این تابع $(۰,+\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$y = ۲^x, y = ۳^x, y = ۵^x$

answer

حالت دوم: در این حالت پایه بین صفر و یک است و در نتیجه با افزایش مقادیر **x**، مقدار **y** کاهش می‌یابد و نمودارش اکیدا نزولی است.



برخی از ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

۲- این نمودار در عرض $y=1$ از محور **y**ها گذر می‌کند و در نتیجه عرض از مبدأ آن $y=1$ است.

۳- این نمودار همواره بالای محور **x**ها جا خوش کرده و در نتیجه به ازای $x \in \mathbb{R}$ ، $a^x > 0$.

۴- این تابع هم هیچ محدودیت و گیری برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش می‌شود $D_y = \mathbb{R}$.

اما با توجه به نمودار در می‌یابیم که برد این تابع $R_y = (0, +\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y=(\tfrac{۱}{۲})^x, y=(\tfrac{۱}{۳})^x, y=(\tfrac{۱}{۴})^x$$

answer

معادلات نمایی

اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x = b^y$ ، آنگاه $x = y$ و برعکس.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۴^{۲x-۱} = ۸^{x+۱}$$

$$۵^{۳x-۱} = ۱۲۵^{۲x+۱}$$

نامعادلات نمایی

نامعادلاتی‌اند به فرم $b^x \geq b^y$ که ۲ حالت کلی دارند:

حالت اول: اگر $b > 1$ آنگاه $x \geq y$ و بالعکس. (جهت عوض نمی‌شود!)

حالت دوم: اگر $0 < b < 1$ آنگاه $x \leq y$ و بالعکس. (جهت عوض می‌شود!)

مثلا اگر $5^x \leq 5^4$ آنگاه $x \leq 4$ و اگر $(\frac{1}{5})^x \leq (\frac{1}{5})^4$ آنگاه $x \geq 4$.

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را به‌دست آورید!

$$۲^{x-۳} \leq \frac{۱}{(۳۲)^{۳}}$$

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲n+۵} < \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۷}$$

تعریف تابع لگاریتمی

$\bigcirc = \log_a^{\Delta} \Leftrightarrow a^{\bigcirc} = \Delta$ رمز: هر توانی یک لگاریتم دارد، که باید $a > ۰$ و $a \neq ۱$ و $\Delta > ۰$.

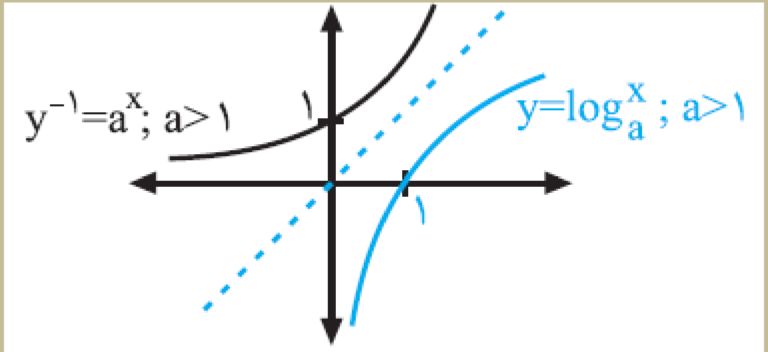
یعنی مثلا اگر $۲^{۳} = ۸$ آنگاه $۳ = \log_{۲}^{۸}$.

نکته: ارتباط بین یک تابع لگاریتمی و یک تابع نمایی: توابع لگاریتمی و نمایی معکوس یکدیگرند. یعنی اگر $f(x) = a^{x}$ آنگاه $f^{-۱}(x) = \log_a^{x}$ و اگر $f(x) = \log_a^{x}$ آنگاه $f^{-۱}(x) = a^{x}$.

نمودار تابع لگاریتمی با ضابطه $f(x) = \log_a^x$

با توجه به اینکه تابع لگاریتمی، معکوس تابع نمایی است، پس نمودار آن، قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(x = y)$ است و ۲ حالت کلی دارد:

حالت اول : اگر مبنای لگاریتم بیش از یک باشد، نمودارش این‌گونه می‌شود:



برخی از ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع هم تابعی یک به یک است و معکوس آن تابعی نمایی است.

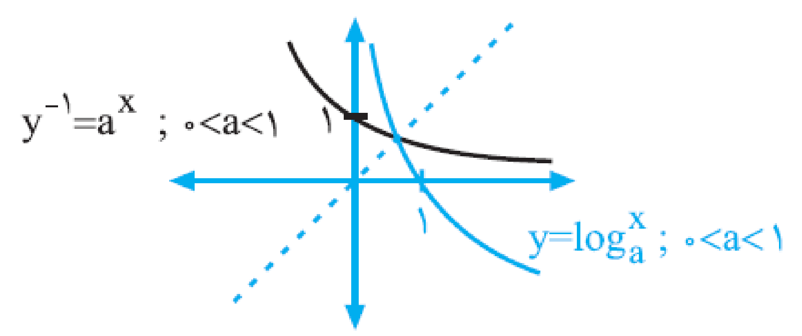
۲- تابع لگاریتمی به فرم $y = \log_a^x$ که $a > ۱$ هیچ‌گاه نمی‌تواند محور **y**ها را قطع کند، (چون $x > ۰$ و در نتیجه **x** نمی‌تواند صفر شود،) بلکه نمودارش فقط به محور **y**ها، آرام آرام میل می‌کند (بعدا می‌خوانیم زمانی که **x** به ۰^+ میل کند، **y** به .... میل می‌کند) و از آن عبور نمی‌کند.

۳- این نمودار برخلاف نمودار تابع نمایی، محور **x**ها را قطع می‌کند و طول از مبدأ آن $x = ۱$ است.

۴- نمودار این تابع هم صعودی اکید است. (یعنی هر چه **X** زیاد شود، $\log_a^x$ $(a>۱)$ هم زیاد می‌شود.)

۵- با نگاهی به نمودار $y=\log_a^x$ $(a>۱)$ به حدود دامنه و برد آن پی می‌بریم. پس $D_y=(۰,+\infty)$ و $R_y=\mathbb{R}$.

حالت دوم $۰<a<۱$: اگر مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد، نمودار تابع این گونه می‌شود:



برخی ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

۱- این تابع هم یک به یک است و معکوس آن، تابع نمایی است.

۲- تابع لگاریتمی به فرم $\circ < a < 1$ ، $y = \log_a^x$ هیچ‌گاه نمی‌تواند محور **y**ها را قطع کند و از آن عبور کند، بلکه به محور **y**ها میل می‌کند.

۳- برخلاف نمودار تابع معکوسش (تابع نمایی)، این تابع محور **x**ها را قطع می‌کند و طول از مبدأ آن $x = 1$ است. (یعنی اگر $y = \circ$ آنگاه $x = 1$)

۴- نمودار این تابع نظیر تابع معکوسش، اکیدا نزولی است. (یعنی هرچه مقدار **x** زیاد شود، مقدار $\log_a^x$ که $۰ < a < ۱$ کم و کمتر می‌شود.)

۵- با نگاهی به نمودار تابع $y = \log_a^x$ که $۰ < a < ۱$ درمی‌یابیم که دامنه و برد آن به صورت بازه‌های $D_y = (۰, +\infty)$ و $R_y = \mathbb{R}$ می‌باشد.

نمودار تابع لگاریتمی

به طور کلی، دامنه تابع لگاریتمی به فرم $y=\log_{\bigcirc}^{\Delta}$ (که Δ و $\bigcirc$ توابعی از **x** می‌باشند)، از اشتراک ۳ شرط زیر به دست می‌آید:

(۱) $\Delta > 0$ و (۲) $\bigcirc > 0$ و (۳) $\bigcirc \neq 1$

مثال: (سنجش) دامنه تابع $y=\log_{(\frac{x}{۴})}^{(۲۵-x^۲)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

شروط دامنه را اعمال می‌کنیم و بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

answer

ویژگی‌های لگاریتم

۱- $\log^{a} = \log_{۱۰}^{a}$

۲- $\log_{a}^{a} = ۱ \quad (a \neq ۱, a > ۰)$

۳- $\log_{a}^{۱} = ۰ \quad (a \neq ۱, a > ۰)$

۴- $\log_{c}^{ab} = \log_{c}^{a} + \log_{c}^{b}$

۵- $\log_{c}^{(\frac{a}{b})} = \log_{c}^{a} - \log_{c}^{b}$

۶- $\log_{b^{m}}^{a^{n}} = (\frac{n}{m}) \log_{b}^{a}$

مثال : (مثال کتاب) اگر $\log^{۲} \simeq ۰/۳$ ، حاصل $\log^{۵}$ را بیابید.

answer

۷- $\boxed{a^{(\log_c^b)} = b^{(\log_c^a)}}$ (مثلا: $۸^{(\log_۵^۲)} = ۲^{(\log_۵^۸)}$)

۸- قانون تغییر مبنا: گاهی اوقات، بنا به مدل سوالی که مطرح می‌شود، نیاز است $\log_b^a$ را کلا در مبنای c بنویسیم. راهش این است: $\boxed{\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}}$

مثال: اگر $\log ۵ = ۰/۷$ و $\log ۳ = ۰/۴۷$ و $\log ۷ = ۰/۸۴$ باشد، مقدار $\log \frac{۱۲ \times ۷^{۳}}{۲۵}$ را به‌دست آورید.

answer

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

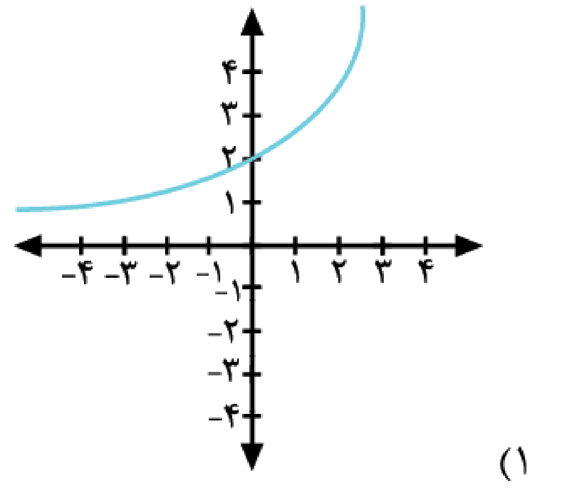
$$\log_{۳}^{(x+۱)} + \log_{۳}^{(x+۴)} = ۲$$

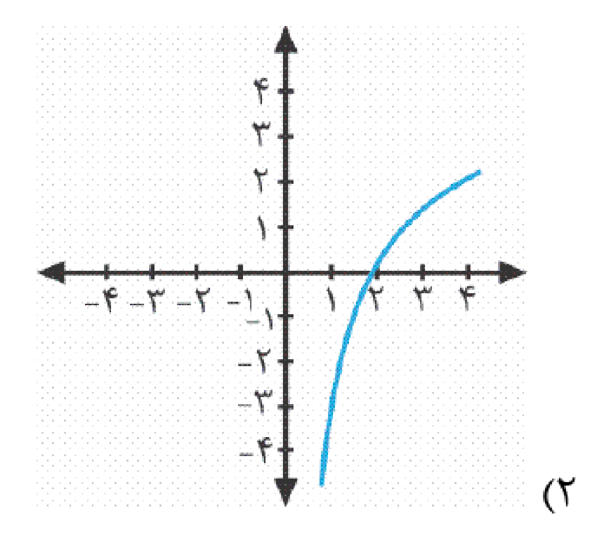
answer

مثال: (فعالیت کتاب) نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $f(x) = ۲^{x} + ۱$

ب) $g(x) = \log(x - ۱)$





مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = -2^{-x} + 1$$

$$y = -\log^{(x-1)}$$

answer

کاربرد توابع لگاریتمی و نمایی

محاسبه انرژی آزادشده در یک زمین‌لرزه

اگر میزان بزرگی یک زمین‌لرزه (M) را برحسب ریشتر داشته باشیم، می‌توانیم میزان انرژی آزادشده در آن زلزله را به‌دست آوریم. میزان انرژی آزادشده را با E نشان می‌دهند و واحد آن اِرگ (Erg) است که از رابطه مقابل به‌دست می‌آید: $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

مثلا یک زلزله ۸ ریشتری اینقدر انرژی آزاد می‌کنه: $\boxed{\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵(۸) = ۲۳/۸ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۸}\ \text{Erg}}$

۱- (تمرین کتاب) کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{۱}{۲},\sqrt{۵})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y=۵^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y=۱۰^x$ با محور yها، نقطه $(۰,۱۰)$ است.

پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=x^۲$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y=۶^x$ با محور xها، نقطه $(۰,۶)$ است.

۲- (تمرین کتاب) معادله‌ی نمایی زیر را حل کنید.

$$۹^{x} = ۳^{x^{۲}-۴x}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۳\log_{۱۰}\sqrt{۱۰۰۰}$$

$$\log_{۳}۲۷^{\frac{۱}{۲}}$$

۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_۴^{(\frac{x}{۲}-۵)}$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به دست آورید.

answer

۵- (تمرین کتاب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x$ از نقطه $(۲,۲)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

answer

۶- (تمرین کتاب) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log_{۳}^{(p^{۲}-۲)} = \log_{۳}^{p}$$

$$\log_{۵}^{(x+۱)} + \log_{۵}^{(x-۱)} = ۱$$

۷- (تمرین کتاب) فرض کنیم . $\mathbf{g(x) = ۴^{x} + ۲}$

الف) $\mathbf{g(-۱)}$ را به دست آورید.   ب) اگر $\mathbf{g(x) = ۶۶}$ ، مقدار $\mathbf{x}$ چقدر است؟

answer

۸- (تمرین کتاب) نمودار تابع با ضابطه $\mathbf{y = ۴^{x} - ۱}$ را در بازه $[-۲,۲]$ رسم کنید.

۹- (امتحانات سال گذشته) جاهای خالی را پر کنید.

الف) دامنه تابع $y=(\sqrt{3})^x$ برابر .... و برد آن برابر .... است.

ب) تابع $y=\log_{0/2}^{x}$ تابعی یک به یک .... در نتیجه معکوس‌پذیر ....

پ) نمودار تابع $y=(\frac{1}{6})^x$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض .... قطع می‌کند.

ت) نمودار تابع $y=\log_{5}^{x}$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول .... قطع می‌کند.

۱۰- (امتحانات سال گذشته) نامعادله $\frac{۱}{۲۵۶} \leq ۸^{۴p-۲}$ را حل کنید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $۲\log_{۵}^{۳} - \log_{۵}^{x} = \log_{۵}^{۳} + \log_{۵}^{۹}$

ب) $۴^{(\log_{۲}^{\sqrt{۵}} - \log_{۲}^{۳})} = ?$

ج) $\log ۱۵ = ? \quad (\log ۲ = a, \log ۳ = b)$

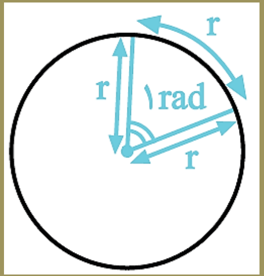
۱۲- (امتحانات سال گذشته) اگر $\log_{c}^{a} = \frac{۳}{۴}$ و $\log_{c}^{b} = \frac{۷}{۹}$ باشد، مقدار $\log_{b^{۳}}^{a^{۲}\sqrt{b}}$ را بیابید.

answer

فصل ۴ :

مثلثات

تعریف رادیان



یک رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی در یک دایره به شعاع **r** که طول کمان روبه‌رو به این زاویه هم **r** باشد.

رابطه بین رادیان و درجه؛ این را یک اصل بگیرید که **π** رادیان ۱۸۰ درجه است. حالا یک نسبت بسازید.

$$\frac{R}{D} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

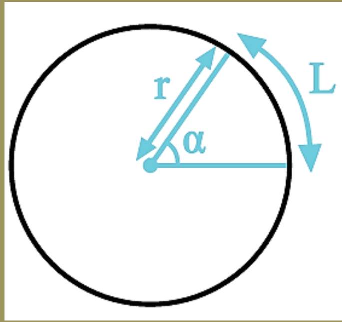
مثال؛ یک رادیان حدود چند درجه است؟

answer

مثال؛ زاویه ۱۰۵− درجه را به رادیان تبدیل نموده و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

answer

رابطه بین زاویه مرکزی (بر حسب رادیان) و طول کمان روبه‌رویش



رابطه بین زاویه مرکزی (بر حسب رادیان) و طول کمان روبه‌رویش

یک نسبت به صورت زیر می‌سازیم:

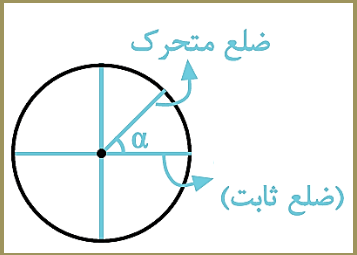
نکته: در رابطه $L = r\alpha$ ، دقت شود α بر حسب رادیان است.

مثال: شخصی در پیست دوچرخه‌سواری به شکل دایره و به شعاع ۳۵۰۰ متر مسافت $\frac{۷\pi}{۲}$ کیلومتر را طی می‌کند.

مقدار زاویه‌ای که چرخیده است برحسب درجه تعیین کنید.

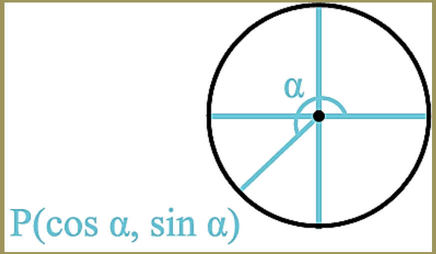
answer

دایره مثلثاتی



وظیفه تولید زاویه بر عهده دایره مثلثاتی است. این دایره شعاعش ۱ واحد است. در این دایره یک ضلع ثابت وجود دارد، یک ضلع متحرک! ضلع متحرک با حرکت خود و انحرافی که ایجاد می‌سازد، زاویه تولید می‌کند.

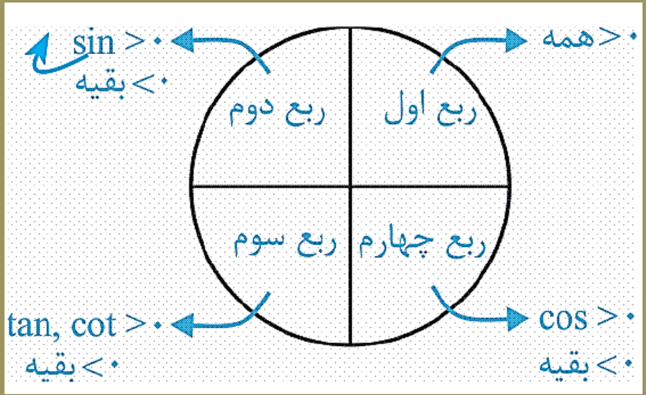
حرکت ضلع متحرک در جهت عقربه‌های ساعت حرکتی منفی است و زوایای منفی تولید می‌کند.
حرکت ضلع متحرک در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکتی مثبت است و زوایای مثبت تولید می‌کند.



نقطه انتهایی ضلع متحرک دارای یک مولفه طولی و یک مولفه عرضی است.

پس در دایره مثلثاتی، محور طول‌ها را محور Cos ها و محور عرض‌ها را محور Sin ها می‌نامیم!

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های دایره:

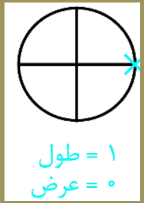


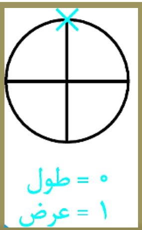
یه رمز هست به نام «هستک» که نشون می‌ده تو ناحیه‌ها به ترتیب کی مثبته و چی به چیه! (همه ـ سینوس ـ تانژانت و کتانژانت ـ کسینوس) خوبه بلدش باشیم!

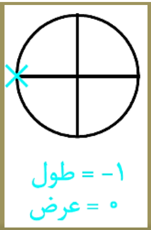
مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

قبل از حفظ جدول زیر، به این نکته توجه کنید که برای به‌دست آوردن مقادیر مثلثاتی ابتدای ربع‌ها (۰°,۹۰°,۱۸۰°,۲۷۰°,۳۶۰°) فقط کافی است یک دایره بکشید و آن نقطه را مشخص کنید. طول آن نقطه Cos زاویه و عرضش Sin زاویه خواهد بود.برای تانژانت کوتانژانت هم امتداد بده! یکیش صفره یکیش تعریف نشده!

نسبت	کمان							
	۰°	$۳۰^\circ(\frac{\pi}{۶})$	$۴۵^\circ(\frac{\pi}{۴})$	$۶۰^\circ(\frac{\pi}{۳})$	$۹۰^\circ(\frac{\pi}{۲})$	$۱۸۰^\circ(\pi)$	$۲۷۰^\circ(\frac{۳\pi}{۲})$	$۳۶۰^\circ(۲\pi)$
Sin	۰		$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	−۱	۰
Cos	۱	$\frac{۱}{۲}$ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	−۱	۰	۱
tan	$\frac{۰}{۱}=۰$	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$\frac{۱}{۰}=\cdot\ R$	$\frac{۰}{-۱}=۰$	$\frac{-۱}{۰}=\cdot\ R$	۰
cot	$\frac{۱}{۰}=\cdot\ R$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{۰}{۱}=۰$	$\frac{-۱}{۰}=\cdot\ R$	$\frac{۰}{-۱}=۰$	$\frac{۱}{۰}=\cdot\ R$







روش محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرآشنا! (به فرم $\left(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha\right)$)

گام اول: ابتدا باید مشخص کنید که هر کدام از این زوایای از ابتدای کدام ربع و به چه اندازه منحرف شده‌اند.

(مثلا ۱۳۵° را می‌توان به صورت ($۹۰^\circ+۴۵^\circ$) یا ($۱۸۰^\circ-۴۵^\circ$) نوشت.)

گام دوم: (تشخیص علامت) مشخص کنید زاویه مربوطه در کدام ربع است و علامت نسبت داده شده را در آن ربع بیابید.

گام سوم: (تشخیص نسبت) اگر ابتدای ربع داده شده مضرب فرد ۹۰° بود، (یعنی $\pm۹۰^\circ$ یا $\pm۳\times۹۰^\circ=\pm۲۷۰^\circ$ یا $\pm۵\times۹۰^\circ=\pm۴۵۰^\circ$ که جایگاهشون بالا و پایین دایره هست) در این صورت Sin و Cos به هم و tan و cot به هم تبدیل می‌شوند. در غیر این صورت تغییری در نسبت داده شده رخ نمی‌دهد.

$۱)\quad \mathrm{Sin}(۲۱۰^\circ) =$

$۲)\quad \cot(۱۳۵^\circ) =$

$۳)\quad \cot(\pi + ۲۰\alpha) =$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فقط Cos منفی رو می‌خوره، بقیه می‌ندازن بیرون منفیه بربختو!

$۱)\ \mathrm{Cos}(-\alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$

$۲)\ \mathrm{Sin}(-\alpha) = -\mathrm{Sin}\,\alpha$

$۳)\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$۴)\ \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\mathrm{Cos}(-۹۰^{\circ})+\mathrm{Sin}(-۲۷۰^{\circ})}{\mathrm{Sin}(-۱۸۰^{\circ})-\mathrm{Cos}(-۳۶۰^{\circ})}$$

answer

زاویه‌های متمم

اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ ، آنگاه α و β را متمم هم می‌نامیم. برای ۲ زاویه متمم، Sin یک زاویه با Cos زاویه دیگر و tan یکی با cot دیگری برابر است.

$\boxed{\operatorname{Sin}\alpha=\operatorname{Cos}\beta}$ $\boxed{\operatorname{Cos}\alpha=\operatorname{Sin}\beta}$

زوایای مکمل

اگر $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$ ، آنگاه α و β را مکمل هم می‌نامیم! اگر دو زاویه مکمل باشند، Sin های آن‌ها برابر، اما tan ها، cot ها و Cos های آن‌ها قرینه است.

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin(۱۸۰-\beta)=\sin\beta\\ \tan\alpha=\tan(۱۸۰-\beta)=-\tan\beta\\ \cot\alpha=\cot(۱۸۰-\beta)=-\cot\beta\\ \cos\alpha=\cos(۱۸۰-\beta)=-\cos\beta\end{cases}$$

فرمولای مقدماتی مثلثات

۱ $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

۲ $\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha$ → ۴ $\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}$

α در نواحی ۱ و ٤
α در نواحی ۲ و۳

۳ $\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha$ → ۵ $\sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}$

α در نواحی ۱ و ۲
α در نواحی ۳ و٤

۶ $\tan\alpha=\frac{۱}{\cot\alpha}$

۷ $\tan\alpha.\cot\alpha=۱$

فرمولای نقره‌ای

۱ $\xrightarrow{\div\sin^{۲}\alpha}$ $\frac{\sin^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

۱ $\xrightarrow{\div\cos^{۲}\alpha}$ $\frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

۸ $۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

۹ $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

مثال: اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را بیابید.

answer

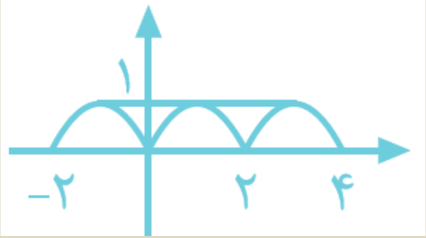
مثال: اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

answer

توابع مثلثاتی

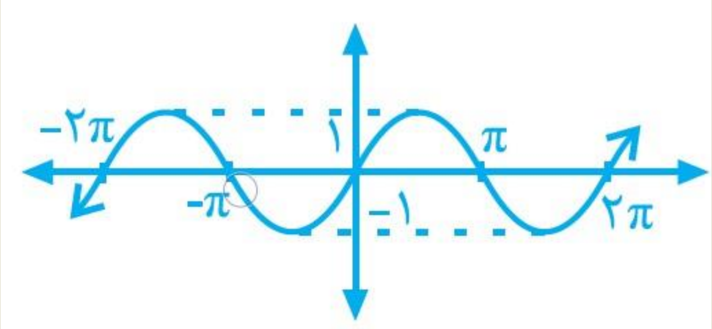
تابع متناوب (تعبیر نموداری): از نظر نموداری تابع متناوب تابعی است که نمودار آن در یک طول ثابت، متناوباً تکرار شود

دوره تناوب: به طولی که نمودار یک تابع متناوب در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن تابع می‌گویند و با **T** نشانش می‌دهند. دوره تناوب چون یک کمیت از جنس طول است، همواره مقدارش مثبت است. ($T > ۰$)



$$T = ۲$$

تابع سینوس؛ نمودار تابع $y = \operatorname{Sin} x$ به فرم روبه‌روست.



از روی این نمودار، چند ویژگی مهم تابع $y = \operatorname{Sin} x$ مشخص می‌شود.

۱- تابع $y = \operatorname{Sin} x$ متناوب است و دوره تناوبش $T = ۲\pi$ است. $\longleftarrow$ دوره تناوب

$y = \sin ax$ می‌شود . $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۲- دامنه این تابع $\mathbb{R}$ است. به طور کلی تابع سینوسی، محدودیت و شرطی برای مقادیر x ایجاد نمی‌کند.

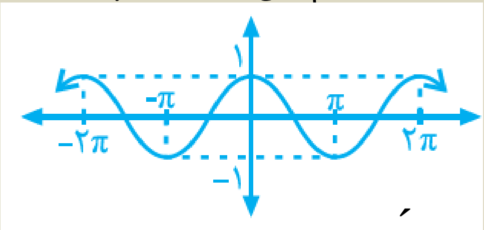
۳- برد این تابع برابر بازه $[-۱,۱]$ است. یعنی $-۱ \leq \operatorname{Sin} ax \leq ۱$ پس در یک دوره تناوب، حداقل مقدار (min) آن ۱- و حداکثر مقدار (max) آن ۱ می‌شود.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$y = ۲\,\mathrm{Sin}\,x$ $\qquad$ $y = |\mathrm{Sin}\,x|$ $\qquad$ $y = -\mathrm{Sin}\,x + ۱$

answer

تابع کسینوس : نمودار تابع $y = \text{Cos}\,x$ به فرم روبه‌رو است. از روی این نمودار هم می‌توان به چند ویژگی کلیدی تابع $y = \text{Cos}\,x$ پی برد:



۱- تابع $y = \text{Cos}\,x$ متناوب است و دوره تناوبش $T = ۲\pi$ است ⟵ دوره تناوب $y = \text{Cos}\,ax$ می‌شود . $T = \frac{۲\pi}{|a|}$

۲- دامنه آن است. به طور کلی تابع کسینوسی هم مانند تابع سینوسی، شرط و محدودیتی روی مقادیر **X** اعمال نمی‌کند!

۳- برد تابع $y = \text{Cos}\,x$ بازه $[-۱,۱]$ است. $-۱ \le \text{Cos}\,ax \le ۱$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

$$y = \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۲}\right) \qquad y = \left|\frac{\pi}{۲} + ۲\,\mathrm{Cos}(-x)\right|$$

answer

۱- (تمرین کتاب) زاویه D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه این زاویه چند درجه است؟

۲- (تمرین کتاب) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مفروض است. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتیمتر از این دایره چند رادیان است؟

۳- (تمرین کتاب) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos(-۷۲۰^\circ)+\cot(-۶۰۰^\circ)+\tan ۷۲۰^\circ-\tan(-۶۰۰^\circ)$

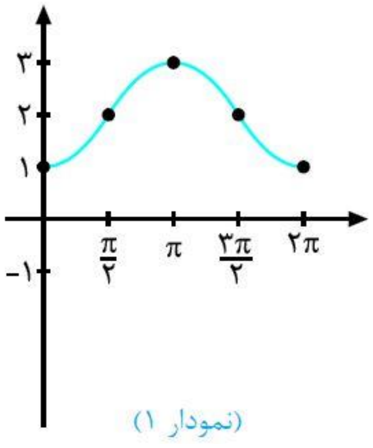
ب) $\cos(-۲۱۰^\circ)+\cot(۲۴۰^\circ)$

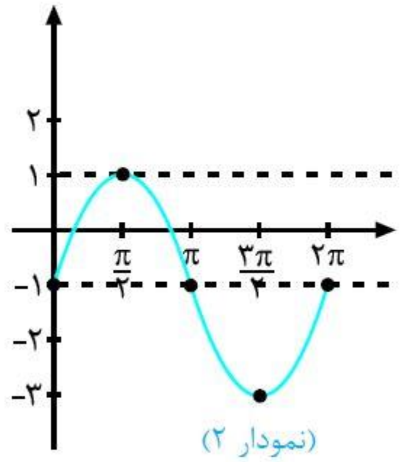
پ) $\sin ۶۳۰^\circ+\tan(-۵۴۰^\circ)$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})$

ج) $$\frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴})+\tan(\frac{-۴\pi}{۳})}$$

۵- (تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر، کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.





الف) $y = ۲\cos x + ۱$

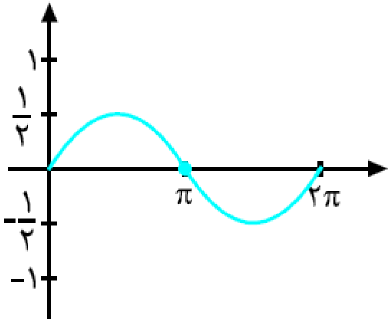
ب) $y = ۲\sin x - ۱$

پ) $y = ۲ - \cos x$

ت) $y = \sin x - ۲$

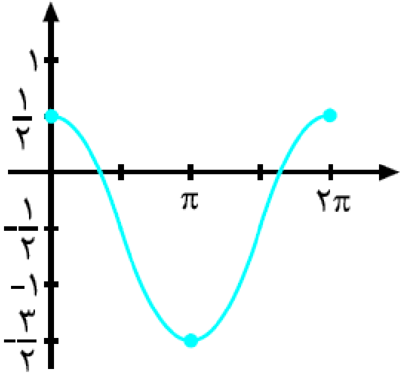
۶- (تمرین کتاب) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{۱}{۲} \operatorname{Sin} x$ را نشان می‌دهد.



answer

ب) شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.



answer

پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = ۱ + \text{Sin}\, x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور Xها انتقال دهیم.

answer

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\mathbf{Cos}\,x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور **X**ها قرینه کنیم.

answer

۷- (امتحانات سال گذشته) در دایره‌ای به محیط 16π طول کمان مقابل به زاویه 150° چقدر است؟

answer

۹- (امتحانات سال گذشته) مقدار $y = ۴\mathrm{Cos}(۲x + \frac{\pi}{۲})$ را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ به دست آورید.

answer

۱۱- (امتحانات سال گذشته) اگر $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{-\sqrt{۵}}{۵}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.

answer

۱۲- (امتحانات سال گذشته) اگر $\frac{۱}{۲}=\frac{\mathbf{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}{۲\,\mathbf{Sin}(\alpha+۹\pi)+\mathbf{Cos}(\alpha-\frac{۵\pi}{۲})}$ ، مقدار $\tan\alpha$ را به دست آورید.

answer

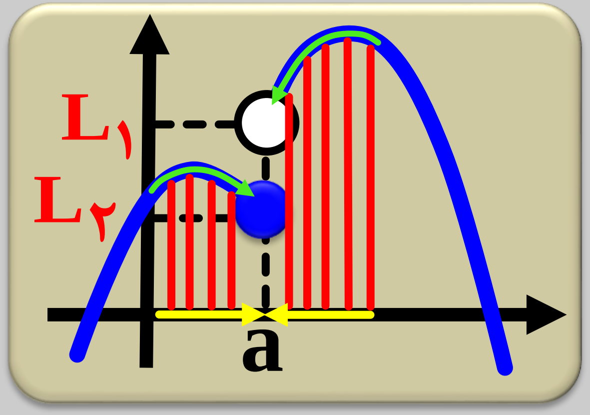
حد و پیوستگی

مفهوم حد

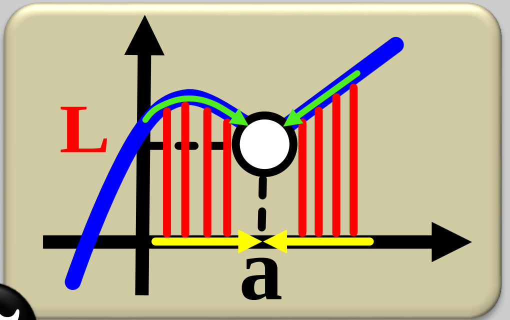
حد راست تابع f در نقطه‌ی a را با $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ نشان می‌دهند.

و مفهومش این است که وقتی x به a نزدیک میشود از مقادیر بیشتر، عرض به $L_۱$ میل میکنرا!

حد چپش را هم در این ببینیرا!



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱ \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=L_۲$$



تابع f در a حد دارد اگر

اولا در یک همسایگی اطراف a تعریف شود.

ثانیا مقادیر حد راست و چپش در a برابر شود.

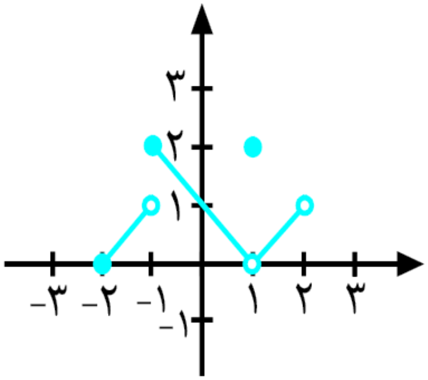
ex آیا تابع $y=\sqrt{۴-x^{۲}}$ در نقاط به طول ۲، ۱- و ۳ حد دارد؟! اگر بله مقدارش ؟!

توجه حد یک تابع در a و مقدارش در این نقطه به هم هیچ ربطی ندارند!

مثال: (تمرین کتاب) برای تابع f که نمودار آن داده شده‌است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$



answer

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x)=۰$

answer

ث) $\lim_{x\to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$

چ) وجود ندارد $\lim_{x\to ۲} f(x) =$

answer

مثال: (تمرین کتاب) آیا حد تابع زیر در $x = ۲$ موجود است؟

answer

مثال: نمودار دو تابع $f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟

(چرا؟) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

answer

محاسبه حدود ← اصول اربعه‌ی سرهنگی

اولین گام در محاسبه‌ی حدود یک جایگزاری درست و اصولی است! به اصول اربعه‌ی(٤گانه) من در محاسبات حدی گوش فرا دهید تا از رستگاران این فصل بشید :)

Rule No.1

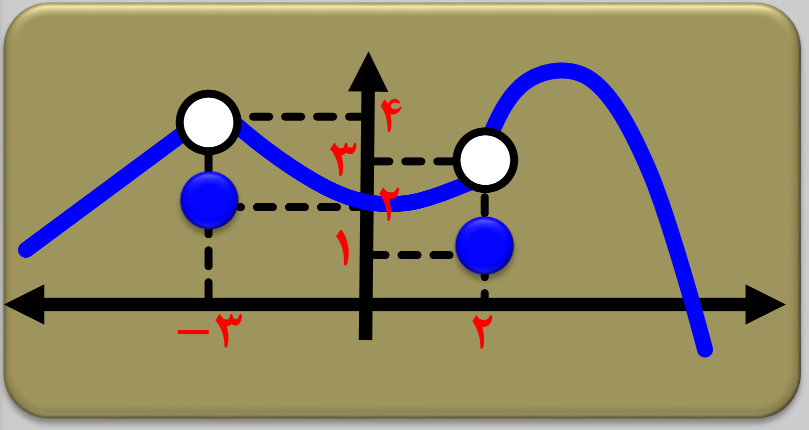
چندجمله‌ای
نمایی لگاریتمی
مثلثاتی
رادیکالی

← جایگزاری ساده انجام میدیم!

اینجا برامون مهم نیست که $x\to a^+$ ، $x\to a^-$ یا $x\to a$! خود a رو جایگزاری میکنیم!

توجه وقتی بجای ایکس‌ها قرار میدهیم a ، درواقع a نسبی را جایگذاری میکنیم نه a مطلق!

ex شکل زیر نمودار تابع f است. با توجه به آن حاصل حد داده شده را بیابید! باتشکر!



$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+۲x\cos((x-۱)\pi)}{۲^{x-۲}+f(-x-۱)}=?$$

Rule No. 2

رفتار درست با جزصحیح

جزصحیح رو به چشم یه عدد ببینید! یعنی هرجای حد، یه براکت دیدی اول اونو تعیین مقدار کن!

خود عدد(نه کمتر یا بیشترش) رو جایگزاری کن! بعدش...

اگر داخل براکت صحیح شد، یکبار دیگه با دقت جایگزاری را تکرار کنید!

اگر داخل براکت غیرصحیح شد، همان را حساب کنید!

ex

$$\lim_{x\to ۱/۵} [-۲x]$$

ex

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{[-x]+\sin \pi x}{۳^{x-۲}+[\frac{-x}{۳}-۱]}$$

Rule No. 3 ← رفتار درست با قدرمطلق

اگه بعد از جایگزاری داخل قدر مطلق صفر شد باید تعیین علامت شود! والسلام!

ex $\lim\limits_{x\to -۲^-} \dfrac{|x-۲|-[-x]}{\sqrt{-x+۲}}$

ex $\lim\limits_{x\to -۱^+} \dfrac{|x^۲-۱|}{x[-x+۱]+۱}$

ابهام $\frac{0}{0}$: در مسائل حدی، گاهی اوقات پس از جایگذاری در یک تابع کسری، به عبارت $\frac{0}{0}$ برمی‌خوریم که به آن ابهام $\frac{0}{0}$ می‌گویند و باید با روش‌های زیر، حد را رفع ابهام کنیم و جوابش را بیابیم.

روش اول: اگر در محاسبه $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، ($P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند) به ابهام $\frac{0}{0}$ برخورد کنیم، چون $P(x) = Q(x) = 0$ ، پس $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x - a$ (عامل صفرساز) بخش‌پذیرند. صورت و مخرج را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم تا تجزیه شوند، سپس عوامل صفرساز صورت و مخرج $(x - a)$ را با هم ساده می‌کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{x^{۳} - ۳x^{۲} - ۲x + ۲}{x^{۲} - ۱}$$

نکته: لزومی ندارد برای تجزیه حتما تقسیم کنیم. اگر توانستید با استفاده از اتحادها هم می‌توانید تجزیه کنید.

روش دوم: اگر در صورت یا مخرج عبارتی رادیکالی با فرجه ۲ ($\sqrt{\Delta} \pm a$) دیدید، باید صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید، بعد عامل صفرساز صورت و مخرج را با هم ساده کنید.

مثال: هر یک از حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۵x+۴}$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sqrt{x+۶}+x}{(x^{۳}+۸)}$$

مثال: (تمرین کتاب) اگر $\lim_{x\to ۳} f(x) = ۳$ و $\lim_{x\to ۲} g(x) = ۰$ و $\lim_{x\to ۲} h(x) = -۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

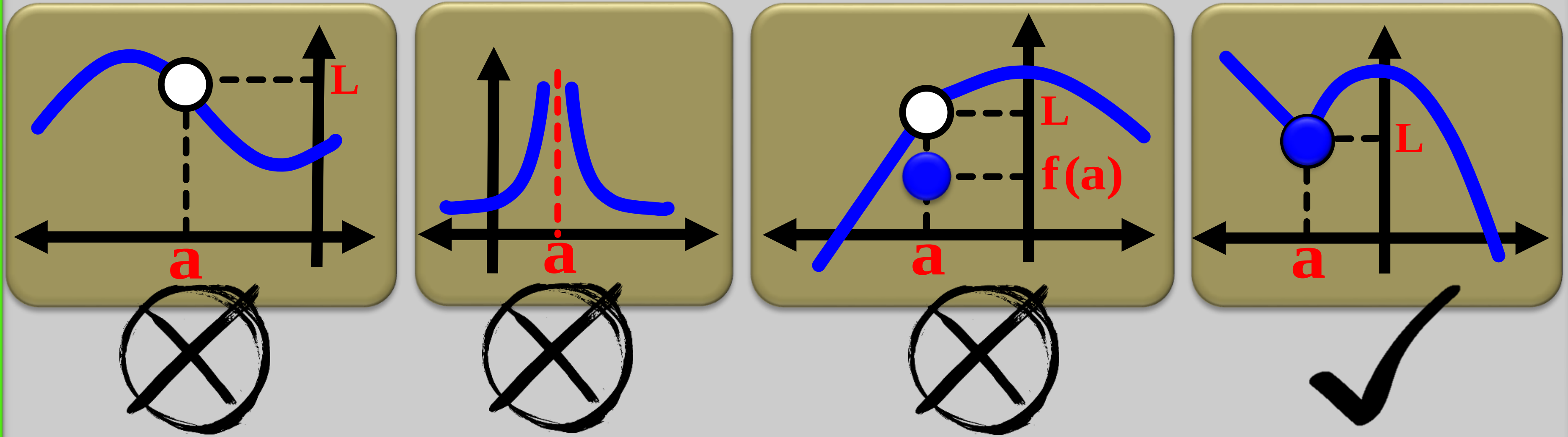
$$\lim_{x\to ۲} (f(x) + h(x))$$

$$\lim_{x\to ۲} (h(x))^{۵}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۳f(x)}{g(x) - ۵h(x)}$$

پیوستگی

تابع f در a پیوسته است اگر بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودارش را آنجا رسم کرد!



تعریف ریاضی

تابع f در a پیوسته است هرگاه حدش در این نقطه موجود و با مقدارش برابر باشد!

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس وضعیت پیوستگی آن را روی نقاط دامنه‌اش بررسی کنید.

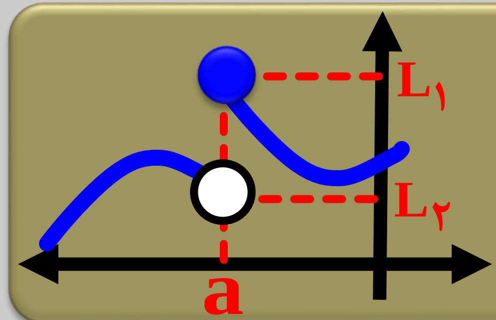
answer

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} bx-1 & x<3 \\ 5 & x=3 \\ x+a & x>3 \end{cases}$ در نقطه $x=3$ پیوسته باشد.

answer

پیوستگی راست!

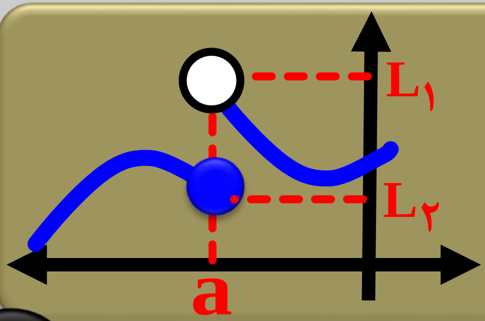
اگر فقط حد راست و مقدار برابر باشند و این دو با حد چپ برابر نباشند!



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)=L_1 \neq \lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

پیوستگی چپ!

اگر فقط حد چپ و مقدار برابر باشند و این دو با حد راست برابر نباشند!



$$\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=L_2 \neq \lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ با نمودار مقابل را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

پیوستگی روی یک بازه!

نوع بازه	شرط پیوستگی تابع f روی بازه
(a,b)	تابع f باید در همه‌ی نقطه‌های موجود در این بازه، پیوسته باشد. **این‌جوری هم ببین:** تابع در هیچ‌یک از نقطه‌های این بازه، ناپیوسته نباشد.
$[a,b)$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی a باید پیوستگی راست داشته باشد: $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)}$
$(a,b]$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی b باید پیوستگی چپ داشته باشد: $\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)}$
$[a,b]$	۱ تابع f در بازه‌ی بازِ (a,b) پیوسته باشد و اصلاً در این بازه نقطه‌ی ناپیوستگی نداشته باشد. ۲ تابع در نقطه‌ی a پیوستگی راست داشته باشد. $\boxed{f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)}$ ۳ تابع در نقطه‌ی b پیوستگی چپ داشته باشد. $\boxed{f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x)}$

مثال: تابع f با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^{۲}-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) دامنه و برد f را به دست آورید.

ج) آیا f در دامنه‌اش پیوسته است؟

answer

۲- (تمرین کتاب) تابعی مانند $\mathbf{f}$ ارائه کنید که در نقطه ۳ فاقد حد باشد و $\mathbf{f(۳) = ۱}$.

۳- (تمرین کتاب) تابعی مانند $\mathbf{f}$ ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد و $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۴$

۴- (تمرین کتاب) اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

۵- (تمرین کتاب) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۳}+۸}{x+۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to ۳^+} \frac{x - ۲}{[x] + ۱}$$

$$\lim_{x \to -۲^+} \frac{x}{[-x]}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \mathrm{Sin}^۲ x}{۱ - \mathrm{Sin}\, x}$$

۶- (تمرین کتاب) توابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ را در نظر بگیرید و پیوستگی ایـن توابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

answer

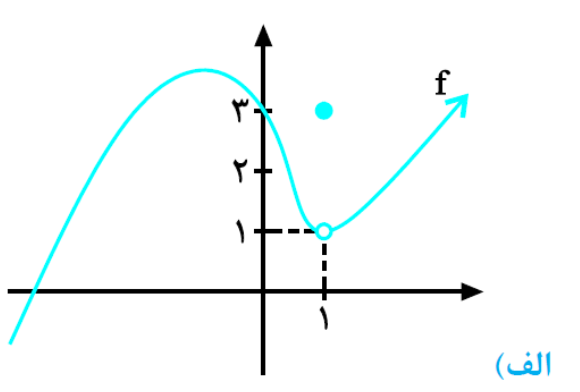
۷- (تمرین کتاب) با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$ ، f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

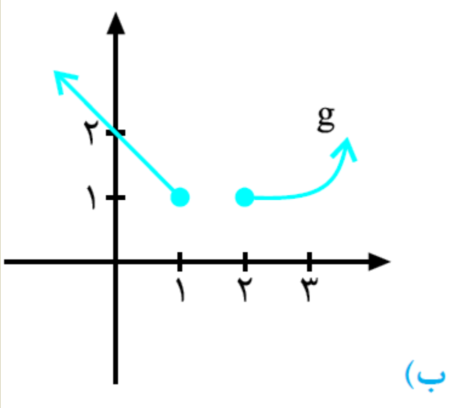
۸- (تمرین کتاب) پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^{۲}+۲ & x>۰\end{cases}$ را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

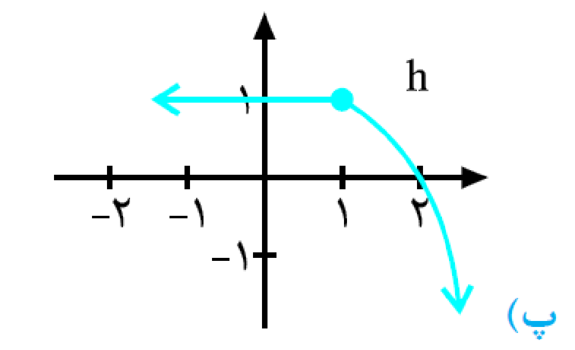
۹- (تمرین کتاب) تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی ۱- باشد، ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

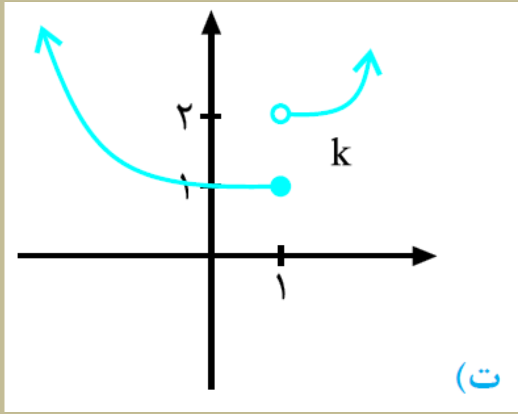
answer

۱۰- (تمرین کتاب) کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟









۱۲- (امتحانات سال گذشته) الف) تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید و سپس وضعیت پیوستگی آن را در بازه‌های $[۰,۱)$ و $(-۱,۰)$ بررسی کنید. ب) آیا تابع در بازه‌های $[-۱,۱]$ پیوسته است؟ چرا؟

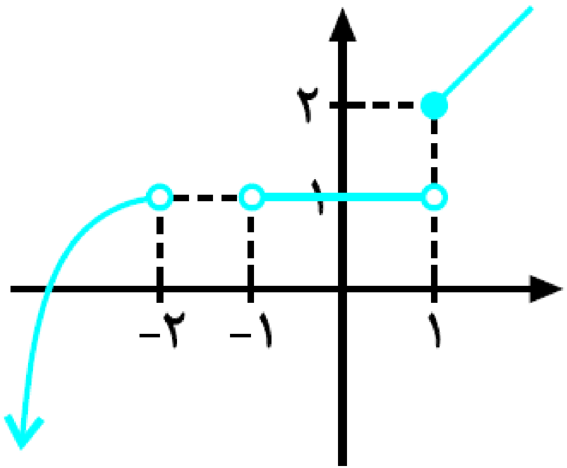
answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۵} \frac{۳x^{۲} - ۱۳x - ۱۰}{x^{۲} - ۶x + ۵}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin x}{\cos^{۲} x}$$

۱۴- (امتحانات سال گذشته) نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید.



þ ²H) $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x)$

J) $\lim\limits_{x \to ۱^{-}} f(x)$

N) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$

R) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x)$

۱۵- (امتحانات سال گذشته) حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۴x + ۳}$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{|x - ۲|}{x - ۲}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\mathrm{Sin}\,x - \mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}^۲ x - \mathrm{Cos}^۲ x}$$

مخصوص رشته ریاضی

روش سوم: اگر $\Delta \to 0$ آنگاه داریم:

$$\boxed{\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta}{\sin \Delta} = 1} \qquad \boxed{\lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1}$$

توجه داشته باشید حتما کمان جلوی $\sin$ باید با عبارت داخل صورت (یا مخرج) دقیقا یکی باشد.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 5x}{x^2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

روش چهارم (تغییر متغیر)؛ حواست باشه اینجا رو می‌خوام خودمونی بگم! در حدود یا ابهام $\frac{0}{0}$ که هم عبارت

جبری داشتی (مثل $2x-\pi$) هم عبارت مثلثاتی (مثل $\cos x$) و کمان به سمت یه عبارت دارای

π میل می‌کرد (مثل $x \to \frac{\pi}{2}$)، با تغییر متغیر مسئله را حل کنید. به این صورت که اگر $x \to \alpha$ ، آنگاه

$x-\alpha=t$ ، طوری که $t \to 0$. به جای x هم قرار دهید $t+\alpha$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$$

در محاسبات حدی، ۲ اتحاد زیر را بیاد بسپارید:

$$\boxed{1+\cos 2\Delta = 2\cos^2 \Delta}$$

$$\boxed{1-\cos 2\Delta = 2\sin^2 \Delta}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi}$$

۱۸- (تمرین کتاب) مقدار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را چنان تعیین کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\cos x}{x^{۲}} & x>۰\\ b-۱ & x=۰\\ x-۲a & x<۰\end{cases}$$

در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد.

answer

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۲ - ۲\cos ۲x}{x\sin x}$$