

تابع چندجمله‌ای توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می‌آیند

توانی مسای از ایکس

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ درجه یک چندجمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه

به همیشا ضریبش

$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 2$ درجه ۵ $f(x) = 2x^4 - 3x - \frac{1}{x} + 2$ درجه \times

توابع چندجمله‌ای خاص

۱. **تابع ثابت** ضابطه‌ی آن $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.

$f(x) = (m^2 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{mn}$ تابعی ثابت است. $m+n$

۲. تابع خطی ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدأ d .
پُر واضح است که تابع خطی یک چندجمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

T تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه‌ای به عرض ۱- محور عرض‌ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $-\frac{1}{48}$ (۴) $-\frac{1}{24}$

A

یکنوایی توابع از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود:

۱. **صعودی آکید** $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد

۲. **نزولی آکید** $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد

به توابع نزولی آکید یا صعودی آکید، **یکنوای آکید** (اکیدا یکنوا) می‌گویند

۳ صعودی $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

۴ نزولی $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، **یکتوا** می‌گویند.
به توابعی که نه یکتاوند و نه یکتوای اکید، **غیر یکتوا** می‌گویند.

ترکیب توابع $f \circ g(x) = f(g(x))$ یعنی ایکس‌های تابع f را برادر و پدانش قرار بده $g(x)$

شرطی: $X \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$ و $X \xrightarrow{g^{-1}} g(x) \xrightarrow{f^{-1}} f(g(x))$

یادداشت: \circ پراکنش بزرگتر

دامنه تابع مرکب
 $f \circ g(x) = f(g(x))$; $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$

کتاب: دامنه تابع رو همیشه از راه تعریف (که الان گفتیم) به دست بیارید نه از روی ساختن شایبه!
مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را بنویسید.
الف) $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ دامنه و شایبه $f \circ g(x)$ ؟

answer

ب) $f(x) = \frac{2}{x-1}$ دامنه و شایبه $f \circ f(x)$ ؟

answer

مثال: توابع $f = \{(1,2), (2,4)\}$ و $g = \{(2,3), (5,6)\}$ مفروضه: تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

answer

انتقال ببینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد:

۱ $f(x) + k$
نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k روی محور y ها حرکت بدهد

۲ $f(x+k)$
نمودار $f(x)$ را k واحد و در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بدهد

مثال: نمودار تابع $y = -2(x-1)^2 + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

answer

۳ $kf(x)$
عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ را k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)

ex $y = -2 \cos x$

۴ $f(kx)$
طول نقاط روی نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)

ex $y = \sin 2x$

نکته برعکس!

۱ نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

۲ نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

مثال: (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{3}f(x) + 1$ را رسم کنید.

answer

مثال: نمودار تابع $g(-\frac{x}{3})$ را رسم کنید.

answer

روش سرهنگی‌زهی رسم $f(ax+b)$

ایکس رو تنها کن و هر کاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بدها دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا

ex نمودار $f(x)$

نمودار $f(-2x + 0/5)$ را به درست آورید پلایز!

ایکس رو تنها کن (اول منهای نیم) \rightarrow \rightarrow \rightarrow

مثال) اگر نمودار تابع g به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ را به کمک این رسم کنید.

answer

تابع معکوس هر تابع مانند f یک وارون (f^{-1}) دارد. حالا اگر f^{-1} خود یک تابع باشد می‌گوییم f معکوس‌پذیر است. (آهه کاهی f^{-1} یک تابع نیست!)

توجه شرط لازم و کافی معکوس‌پذیری تابع f این است که f یک‌به‌یک باشد

محاسبه وارون در زوج مرتبه‌ها

$f = \{(1, 2), (2, 3), (5, 3)\} \rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 5)\}$ ❌

$g = \{(1, 4), (2, 3), (5, 6), (0, 1)\} \rightarrow g^{-1} = \{(4, 1), (3, 2), (6, 5), (1, 0)\}$

توجه $D_f = R_{f^{-1}}$ & $R_f = D_{f^{-1}}$

محاسبه وارون در فرم پیکانی کافیه جهت فلش‌ها رو عوض کنی

آیا در مثال بالا تابع f وارون‌پذیر است؟ چرا؟

پدست آوردن نمودار وارون کافی است قرینه‌ی نمودار f نسبت به نیمساز تأمیه اول و سوم را به‌دست بیاورید! نمودار f^{-1} آماده‌ست! (نوش جان!)

توجه اگر نقطه (a, b) روی f باشد، نقطه (b, a) روی معکوسش است و بالعکس!

توجه ترکیب یک تابع با وارونش همانی است.

$f^{-1} \circ f(x) = x, x \in D_f = R_{f^{-1}}$ $f \circ f^{-1}(x) = x, x \in D_{f^{-1}} = R_f$

T هرگاه $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ باشد دامنه تابع $f \circ f^{-1}$ کدام است؟

$(-\infty, 3]$ (3) ✓ $[2, +\infty)$ (2) $(-\infty, 2]$ (1) $[3, +\infty)$ (4)

A

مثال) اگر $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ را بنویسید. $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$

answer

با استفاده از نکته زیر می توان پی برد که آیا دو تابع f و g معکوس هم هستند یا خیر. به این صورت که:

اگر $\text{fog}(x) = x$ & $\text{gof}(x) = x$ آنگاه f و g معکوس یکدیگرند.

مثال: مثال کتاب نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

answer

ex if $f(x) = 2x - 3$ **then** $f^{-1}(x) = ?$

پدست آوردن ضابطه f^{-1}

گام اول بهای $f(x)$ بنویسید y و سعی کنید x رو بر حسب y بدست بیارید (x رو تنها کن!)

گام دوم بهای y بنویسید x و بهای x بنویسید $f^{-1}(x)$ تمام!

ex if $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8+9x}}$ **then** $f^{-1}(x) = ?$

مثال: اگر در کلاس ضابطه وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. دامنه و پیر هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

الف) $h(x) = x^2 + 1$

ب) $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

محدود کردن دامنه f (تعیین کردن f)

گاهی f در دامنه تعریفش غیر یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است. در این صورت دامنه آن را طوری محدود می کنیم (دلفواه) که f در دامنه چریش وارون پذیر شود. به این عمل تعریف کردن f می گویند.

مثلاً با توجه به اینکه $y = x^2$ یک سهمی است، وارون ناپذیر است. اگر پروید سراغ مناسبه

$f^{-1} = \pm\sqrt{x}$ به $f^{-1} = \pm\sqrt{x}$ می رسید که تابع نیست. \Rightarrow

با محدود کردن دامنه f به طور دلفواه، مثلاً $x \leq 0$ ، f یک به یک و معکوس پذیر می شود \Rightarrow

و نمودار معکوس f هم می شود

دقت شود که

$D_{f^{-1}} = R_f = \{x, +\infty\}$
 $R_{f^{-1}} = D_f = \{x, 0\}$

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و پیر آن را مشخص نمایید.

$y = (x-1)^2 - 1$

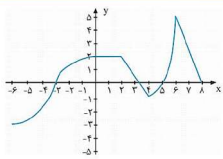
answer

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی را که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 2x-2 & x \geq 2 \end{cases}$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



answer

(تمرین کتاب) تابع نمایشی $y = 2^x - 2$ و تابع کلاریتی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوازی آن‌ها توضیح دهید.

answer

(تمرین کتاب) تابع $y = x^y |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

answer

(تمرین کتاب) در هر قسمت، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{p}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

answer

ب) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

ب) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

answer

(تمرین کتاب) اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 4$ ، مشابه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) مشخص کنید کدام یک از عملیات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = -25$

answer

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

answer

ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = 5$

answer

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، آنگاه $(f \circ g)(5) = g(2)$.

answer

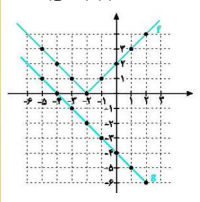
(تمرین کتاب) تابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟ $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

answer

(تمرین کتاب) با توجه به نمودارهای توابع g و f ، مقادیر زیر را در صورت وجود بنویسید.

الف) $(fog)(-1)$

ب) $(gof)(0)$



answer

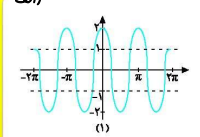
(تمرین کتاب) با توجه به ضابطه‌ی توابع g و f ، معادله مورد نظر را تشکیل داده و آن را حل کنید.

$f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(fog)(x) = 7$

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است. شباهت‌های هر نمودار را مشخص کنید.

الف)



answer

ب)



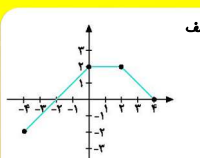
answer

(تمرین کتاب) نمودار تابع $y = -\sin 2x - 1$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

answer

(تمرین کتاب) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(-x) + 2$



answer

ب) $y = 2f(x-1) - 3$

answer

(تمرین کتاب) نشان دهید زیر یک به یک است، سپس ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

$g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

answer

(تمرین کتاب) نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند. $f(x) = -\sqrt{x-8}$ ، $g(x) = 8 + x^2; x \leq 0$

answer

(تمرین کتاب) توابع زیر یک به یک نیستند، با محدود کردن دامنه آن‌ها توابعی یک به یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^2$

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^2$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$

answer

الف) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$

ب) $g(x) = x^2$ ، $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$

answer

$g(x) = x^3$ $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$

ب) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

answer

ضابطه و دامنه تابع وارون تابع زیر را به دست آورید. **نهایی ۱۳۰۲**

$f(x) = -x^2 - 2 \mid x \geq 0$

answer

اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ برابر $[-1, 2]$ و برد آن $[a, b]$ باشد. دامنه و برد تابع $f(\frac{x}{2}) = \frac{1}{x}$ را بیابید. **نهایی ۱۳۰۲**

answer





دوره تناوب توابع مثلثاتی

مفهوم دوره تناوب به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شوده متناوب میگویم. به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می‌شود، دوره تناوب آن می‌گویم و با T نشانش میدییم.

$T \in \mathbb{Q}$

$y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$

$T=1$ $T=2$

دوره تناوب توابع مثلثاتی

$k \sin(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$ $k \tan(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

$k \cos(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$ $k \cot(ax+b)+c \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

T دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 3 \sin(\frac{x}{3}) - 1$ با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

$f(x) = 3 \tan(\frac{x+1}{3}) - 2$ $f(x) = 4 \cos(2x+1) - 2$

$f(x) = 2 \tan(\frac{x}{4}) - 2$ $f(x) = \sin(\frac{1-2x}{4}) - 2$

توابع مثلثاتی ۱ $y = \sin x$

$y = \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ $D_{\sin x} = \mathbb{R}$ $R_{\sin x} = [-1, 1]$

EX $y = 2 \sin(\pi x) - 1$

$y = k \sin(ax+b)+c \rightarrow \max = |k|+c$ $\min = -|k|+c$

۲ $y = \cos x$

$y = \cos x$ $x \in [0, 2\pi]$ $D_{\cos x} = \mathbb{R}$ $R_{\cos x} = [-1, 1]$

EX $y = -3 \cos(-\frac{x}{3}) + 1$

$y = k \cos(ax+b)+c \rightarrow \max = |k|+c$ $\min = -|k|+c$

۳ $y = \tan x$

$y = \tan x$ $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $R_{\tan x} = \mathbb{R}$ $D_{\tan x} : x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

EX $y = \tan(\frac{\pi}{3}x)$

مثال (مثال کتاب درسی) دوره تناوب و مقادیر min و max هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

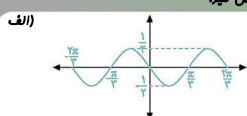
الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$

answer

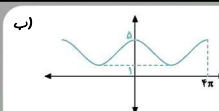
ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

answer

مثال (مثال کتاب) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با تشخیص min و max و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

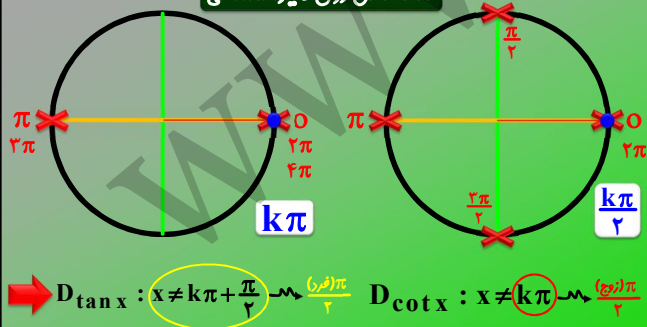


answer

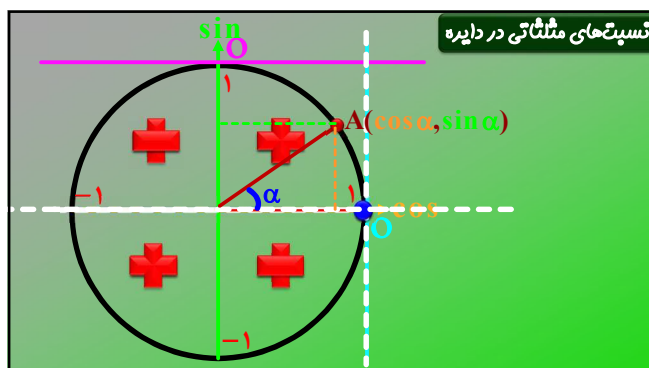


answer

نقاط خاص روی دایره مثلثاتی



نسبت‌های مثلثاتی در دایره



نسبت‌های مثلثاتی زاویای دو برابر همان

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال: (مثال کتاب) مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

answer

معادلات مثلثاتی

معادلاتی که در آنها مجهول در همان نسبت مثلثاتی قرار دارد ۳ مدل کلی دارند:

1 $\sin x = a = \sin \alpha \rightarrow x = 2k\pi + \alpha$ or $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

Why?

مثال: اگر در کتاب (مثال) معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

answer

نکته: اگر \sin مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید. زاویه α را به درست یا بزرگتر منفی را بزرگتر داخل

(ب) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow x = ?$

answer

2 $\cos x = a = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$

$2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow x = ?$

Why?

مثال: (مثال کتاب) معادله $\cos x(2\cos x - 1) = 5$ را حل کنید.

answer

گفته، اگر \cos مساوی یک عدد منفی شده، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیابید.
در نهایت \cos بنویسید. $\pi - \alpha$

$\cos(2x) = -\frac{1}{2}$

(تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.
الف) $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$

answer

ب) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

answer

(تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر تغییر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$
ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2}x$
پ) $y = \sin 2x$

answer

(تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تایی مشتقی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

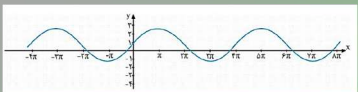
answer

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

answer

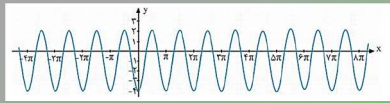
(تمرین کتاب) دنباله مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

(الف)



answer

(ب)



answer

(تمرین کتاب) کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

(ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

(ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

(ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

(تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

(الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

(ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

answer

(تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

(الف) $\sin 2\alpha$ (ب) $\cos 2\alpha$

answer

(تمرین کتاب) نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{3} = \sin 3x$

answer

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

answer

ب) $\cos x = \cos 2x$

answer

ت) $\cos 2x + \sin x = 0$

answer

ت) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

answer

مخصوص رشته ریاضی

$\tan x = a = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال: $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \rightarrow x = ?$

Why?

۲۹۳

مثال: معادله $\tan x = \tan \alpha x$ را حل کنید.

answer

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در شکل روبه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن تا تابلو نقاشی، به صورت $\tan \beta = \frac{y}{x^2 + 1/4}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

answer

کتاب: اگر \tan مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید. زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپذیرید داخل

مثال: معادله مثلثاتی $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

معین کتاب: معادله زیر را حل کنید.

$\tan(2x - 1) = 0$

answer

معین کتاب: معادله زیر را حل کنید.

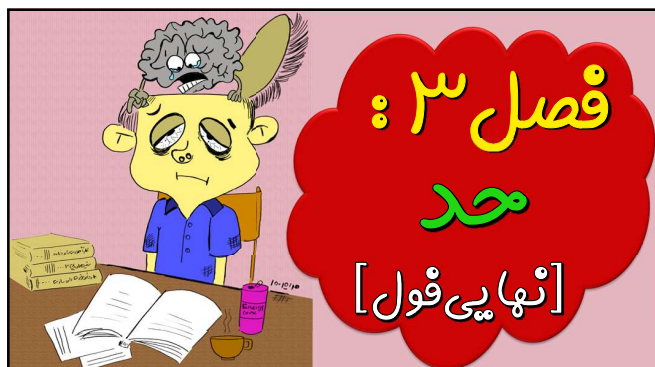
$\tan 2x = \tan(\pi x)$

answer

(تمرین کتاب) مثلث با مساحت ۳ سانتی متر مربع مقروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشد، آن گاه قطر مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

answer





بخش پذیری ← **الگوریتم تقسیم** در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)} \rightarrow f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

باقیمانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

ex $3x^3 - 2x + 1 \div x^2 + 2$

باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$
 $ax+b=0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow r = f\left(\frac{-b}{a}\right)$

مثال: اگر در کلاس کتاب نشان دهید $f(x) = 2x^2 + 5x - 10$ بر دو جمله ای $x+2$ بخش پذیر است.

answer

T اگر عبارت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $2x+3$ برابر -12 باشد، مقدار a کدوم است؟ $10(2)$ $20(1)$ $-20(3)$ $-10(4)$

A

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری

ممکن است از این قسمت دو مدل سؤال ببینید:

مدل اول: اگر در صورت، مخرج یا هر دو، یک تابع چندجمله‌ای داریم که وقتی $x \rightarrow a$ مقدارش صفر می‌شود، یعنی آن چندجمله‌ای بر $x-a$ بخش پذیر است. با تقسیم این چندجمله‌ای بر $x-a$ ، آن را تجزیه کنیم و تمام!

مدل دوم: اگر کسر داده شده شامل عبارتی رادیکالی بود که در نقطه صفری داده شده مقدارش صفر می‌شود، با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج عبارت رادیکالی و حذف عامل صفرساز از صورت و مخرج، گره از گردمان باز می‌شود

ان شاء... و دیگر ریشت نفس $\frac{0}{0}$ را تفاهیم دیرا

مثال: (مثال کتاب) هر تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^2 + 8}$ را در نقطه $x = -2$ در صورت وجود بیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب) در تابع $g(x) = \frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه $x=5$ در صورت وجود بیابید.

answer

کتاب: گاهی فرجه را در کتاب ۳ است. در این صورت باید از انتگرال پاقی و لاغر استفاده کنید. اگر قسمت لاغر (یا پاقی) انتگرال داده شده بود، صورت و مخرج را در قسمت پاقی (یا لاغر) انتگرال ضرب کنید.

مثال: (مثال کتاب) در تابع $h(x) = \frac{x^2-8x}{\sqrt{x-2}}$ را در $x=8$ در صورت وجود بیابید.

answer

همسایگی عدد α

مفهوم ریاضی و نموداری حد

بازه‌ای باز شامل عدد α را یک همسایگی برای α می‌گوییم.



if $\alpha \in (x_1, x_2) \rightarrow$
این بازه به همسایگی
واسه α است.

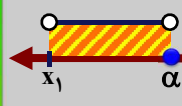
همسایگی راست عدد α بازه‌ای باز شامل اعداد بزرگتر از α .



اگر بازه‌ای (a, b) به همسایگی راست برای α باشد آنگاه
 $\alpha = a$ & $b > \alpha$

همسایگی چپ عدد α

بازه‌ای باز شامل اعداد کوچکتر از α .



اگر بازه‌ای (a, b) به همسایگی چپ برای α باشد آنگاه
 $\alpha = b$ & $a < \alpha$

همسایگی محذوف عدد α

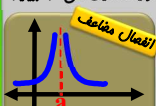
مجموعه‌ای شامل اعداد کوچکتر یا بزرگتر از α که خود α از آن عذر شده باشد.



اگر بازه‌ای $(a, b) \cup (c, d)$ به همسایگی محذوف برای α باشد آنگاه
 $\alpha = b = c$ & $a < \alpha < d$

حد نامتناهی (حد بی‌نهایت)

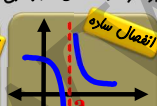
گاهی وقتی اِکس به یک عدد میل می‌کند (از یک یا دو طرف)، حاصل در به بی‌نهایت میل می‌کند یا بی‌نهایت



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

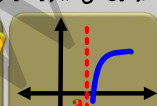
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

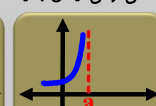


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

هرکدام از عرور بالا در a ، به هر نامتناهی

خط قائم $x=a$ در هرکدام از نمودارهای بالا یک میانه قائم برای تابع f می‌باشد

مثال: (مثال کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، هر چپ و راست این تابع $x=2$ را در بیابید.

answer

مثال: اگر در کلاس) هر دو زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{-x-5}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x-2}{x^2-3x+2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

حد در بی نهایت

گاهی وقتی x بزرگتر یا کوچکتر از یک عدد می شود که همان عدد در بی نهایت است.

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

خط افقی $y = L$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک معادله افقی برای تابع f می باشد.

هشدار! شرط لازم برای اینکه بتوانیم حد در بی نهایت تابعی را حساب کنیم این است که دامنه اش حداقل از یک طرف بی کران باشد.

ex $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2}$

هم ارزی پرتوان! وقتی یکس (پایه) به بی نهایت میل می کند، یک عبارت که متشکل از جمع و تفریق چند جمله ای با بیشترین توان است.

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 4x^2 - 5x - 7x^2 + 4 - 7x^3$

if $x \rightarrow 0 \Rightarrow -2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) - 2\left(\frac{1}{x}\right)^2$

if $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |x^2+x| - x^3, \sqrt[3]{4x^3-2x} - \sqrt[3]{4x^3}, 3x^2+x - 3x^2, \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}$

T حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+x^2+1}{x^2+x-1}$ چقدر از $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x+5}{4x-3}$ کمتر است؟

۱(۱) -۵(۲) -۱(۳) ۵(۴)

A

مثال: اگر در کلاس) هر دو زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3+7x^2-2x-9}{3x^3-8x+1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+4}{x^3+x-8}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+5x^2}{2x^3+9}$

(تمرین کتاب) نشان دهید هر دو جمله ای $f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ بر دو جمله ای $x+1$ بخش پذیر است. سپس به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

answer

(تعریف کتاب) هر دو زیر را مقایسه کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x^2 + x + 4}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

(تعریف کتاب) هر دو زیر را مقایسه کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{x} + 16}{\sqrt{x} + 2}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - x}$

(تعریف کتاب) هرهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

(ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

(ث) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-\Delta x}{x^2-9}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$

(غ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

(تعریف کتاب) نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس هر دو خواسته شده را به دست آورید.

$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$f(x) = \frac{1}{x} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(تمرین کتاب) با توجه به نمودار توابع، هر دو خواسته شده را بنویسید.

(ب)

(ب)

(الف)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} h(x)$

(تمرین کتاب) نمودار تابع گانه شکل زیر است. هر دو خواسته شده را بنویسید.

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

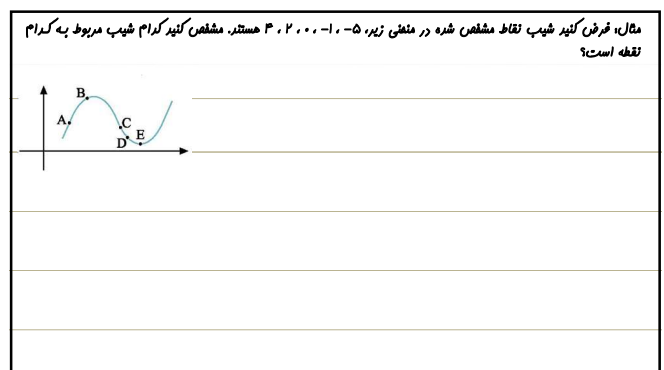
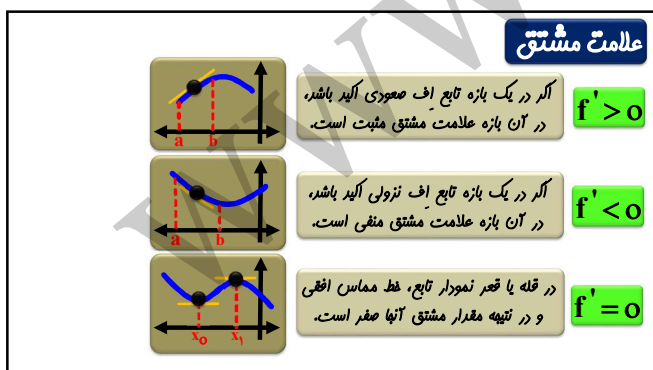
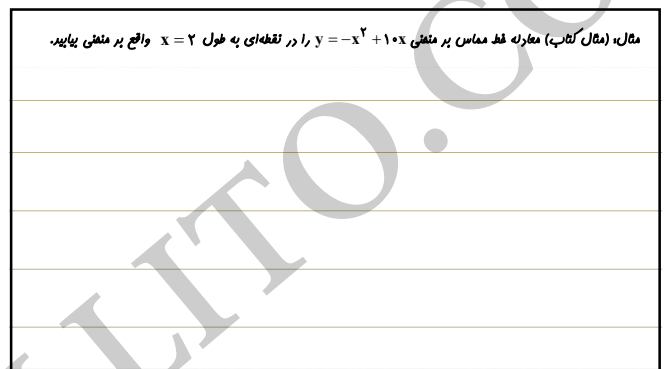
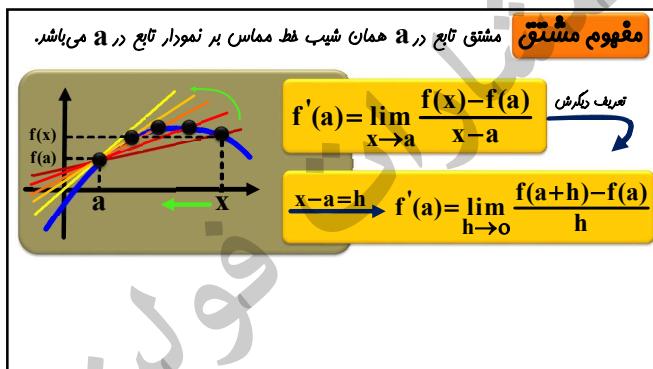
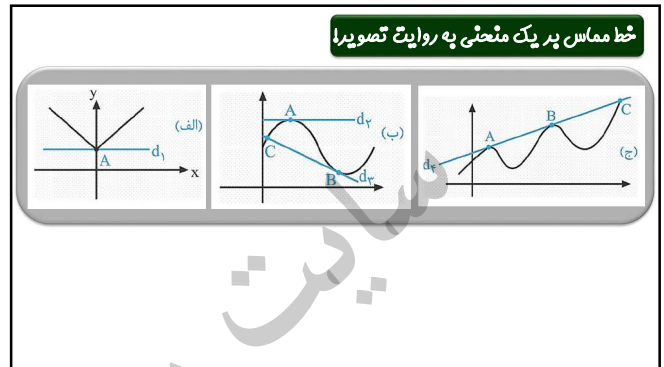
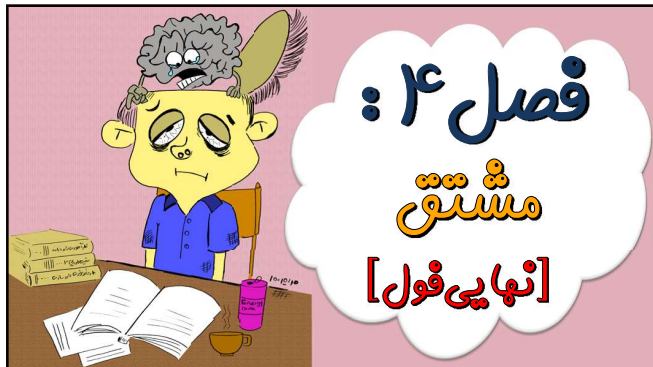
(تمرین کتاب) هر دو زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 6x^2 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$



شیب نیم‌مماس چپ

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شیب نیم‌مماس راست

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شروط مشتق‌پذیری f در x = a زمانی یک تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است که بتوان در آن نقطه بر نمودارش یک خط مماس غیر قائم رسم کرد (مماس ی تکیه)

پس شروط مشتق‌پذیری اف در آ می‌شود:

1) باید تابع در این نقطه پیوسته باشد.

2) باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

توجه شرط لازم برای وجود مشتق راست/چپ (شیب نیم‌مماس راست/چپ) این است که تابع در آن نقطه از راست/چپ پیوسته باشد.

کلا مواست باشه از نقطه توفالی نه میشه مماس رسم کرد، نه نیم‌مماس!

توجه یکی از مهم‌ترین کانیدراهای مشتق‌ناپذیری، نقاط مرزی در توابع پندرضابطه‌ای هستند.

مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

مثال: (مثال کتاب) مشتق‌پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

مماس قائم

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق‌پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.

$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$ (مثبت شد چون صعودی است)

$f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty$ (منفی شد چون نزولی است)

مثال: (مثال کتاب) آیا تابع $y = \sqrt{x}$ در $x = 0$ دارای خط مماس است؟

مثال: آیا تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ دارای خط مماس است؟

تابع مشتق ($f'(x)$)

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این هر موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گویند.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(2)$ را بنویسید.

مشتق گیری! (صفر تا صد) **پنر فرمول مشتق گیری مشتق ببینیم صفا کنیم!**

۱ $y = a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y' = 0$ ۲ $y = ax \rightarrow y' = a$

۳ $y = a\Delta^n \rightarrow y' = an(\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$ **رنگ** \rightarrow نما در ضریب ضرب میشه
یکی از نما کم میشه
در مشتق پایه ضرب میشه

ex $y = \frac{-2}{x^2} \rightarrow y' = \frac{4}{x^3}$ **ex** $y = \frac{1}{\Delta} (-\Delta x)^{1/2} \rightarrow y' = \frac{1}{2} (-\Delta x)^{-1/2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{\Delta x}}$

۴ $y = f \pm g \pm \dots \rightarrow y' = f' \pm g' \pm \dots$ ۵ $y = f \cdot g \rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y = \frac{6}{x^2} - x^2 \sqrt{x} + 4x \rightarrow y' = -\frac{12}{x^3} - 2x \sqrt{x} + 4 = -\frac{12}{x^3} - 2x^{3/2} + 4$

۶ $y = \sqrt{\Delta} \rightarrow y' = \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$ ۷ $y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

ex $y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^2} \rightarrow y' = \frac{(2-1/x)\sqrt{x} - (2x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^4} = \frac{(2\sqrt{x} - 1) - (2x-1)/2}{x^4} = \frac{4\sqrt{x} - 2x + 1}{2x^4}$

T تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2+ax+b & x < 2 \end{cases}$ روی R مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

$-\frac{2}{3}(4)$ $-\frac{11}{3}(3)$ $\frac{2}{3}(2)$ $\frac{11}{3}(1) \checkmark$

مشتق تابع مرکب **بفانید: مشتق داخلش در اف پریم داخلش تمامه!**

$y = f(\Delta) \rightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$

T اگر $f(x) = \frac{x^2-2}{1+x^3}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$, حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟ **کنکور ۹۲**

$\frac{x-2}{x^2}(4)$ $\frac{1}{x^2}(3)$ $\frac{2}{x^2}(2)$ $\frac{2}{x}(1)$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ آنگاه مشتق تابع $g \circ f(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

مثال: اگر در لاس (مشتق های توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = (x^2 + 1)^2 (5x - 1)$

$g(x) = \left(\frac{-2x-1}{x^2+5}\right)^4$

شرط مشتق پذیری روی بازه

1 f در تمامی نقطه های موجود در بازه (a, b) پیوسته است.	مشتق پذیری f روی (a, b)
2 f در تک تک نقطه های این بازه هم، مشتق پذیر است.	
این جوری هم ببین: تابع f در بازه (a, b) هیچ نقطه ی ناپیوسته و مشتق ناپذیری ندارد...!	
1 f در (a, b) مشتق پذیر است.	مشتق پذیری f روی $[a, b]$
2 f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راستا)	
1 f در (a, b) مشتق پذیر است.	مشتق پذیری f روی $(a, b]$
2 f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!)	
1 f در (a, b) مشتق پذیر است.	مشتق پذیری f روی $[a, b]$
2 f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راستا)	
3 f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپا)	

مثال: (مثال کتاب) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه های $[-2, 0]$, $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

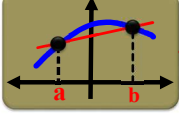
مشتق مرتبه دوم

اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (قوانده شود دیگرک زکوندا) می نویسیم و برای معاشیه آن از تابع y' مشتق می گیریم.

مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^3 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

آهنک تغییر متوسط
واحد نقاط سروته بازه است!

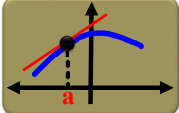
آهنک تغییر متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ همان شیب خط



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنک تغییر لحظه‌ای

آهنک تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x = a$ همان شیب خط مماس بر نمودارش در a است.

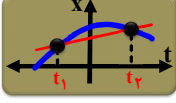


$$f'(a)$$

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قدر متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$ مشخص می‌کند. آهنک متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.


سرعت متوسط
میراثیم (ایشالا!) که سرعت متوسط می‌شود نسبت جابجایی به زمان.

پس در اینجا با تابع $(y = x(t))$ و نمودار مکان بر حسب زمان سروکار داریم!



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه‌ای
باید بدانید که تابع سرعت، مشتق تابع مکان-زمان است!



$$v(t_0) = x'(t_0)$$

مثال: (مثال کتاب) با تغییر رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ارتفاع جسم $h(t)$ ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

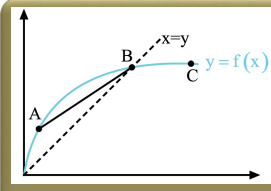
الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

(تمرین کتاب) برای نمودار $y = f(x)$ ، شیب‌های داده شده از دالغه تا دج را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



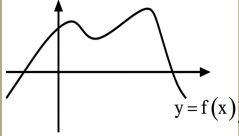
الف) شیب نمودار در نقطه $A \leftarrow m_1$
ب) شیب نمودار در نقطه $B \leftarrow m_2$
پ) شیب نمودار در نقطه $C \leftarrow m_3$
ت) شیب خط $AB \leftarrow m_4$
ث) شیب خط $\leftarrow m_5$
ج) شیب خط $\leftarrow m_6$

(تمرین کتاب) نقاطی مانند **A, B, C, D, E, F, G** را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

(الف) نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

(ب) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

(پ) نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌ها صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

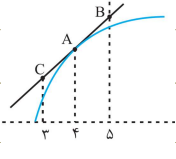


(ت) نقطه‌ای روی منفی است که مشتق در آن‌ها صفر است.

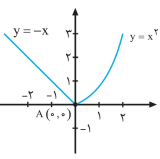
(ث) نقاط **E** و **F**: نقاط متفاوتی روی منفی هستند که مشتق یکسان دارند.

(ج) نقطه‌ای روی منفی است که مقدار تابع در آن‌ها مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

(تمرین کتاب) برای تابع **f** در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مقصودات نقاط **A** و **B** را بیابید.



(تمرین کتاب) با معادله مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه **A** نشان دهید که این تابع در نقطه **A** مشتق‌پذیر نیست.



(تمرین کتاب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن،

(الف) در یک نقطه برابر صفر شود. (ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد. (ث) در تمام نقاط منفی باشد.

(تمرین کتاب) مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری **f** را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

(تمرین کتاب) اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

(تمرین کتاب) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.
اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ و $h'(3)$.

(تمرین کتاب) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ، نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی مشتق موجود نیست.

(تمرین کتاب) مشتق توابع داده شده را بیابید.

$$f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^2+1)$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{-3x+2}$$

(تمرین کتاب) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 1$ بر حسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

(تمرین کتاب) کنیاشن ظرفی ۳۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 20(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید؛
الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ چقدر است؟
ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟

مشتق توابع مثلثاتی (مخصوص رشته ریاضی)

۱- $(\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta$
 ۲- $(\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta$
 ۳- $(\tan \Delta)' = \Delta' (1 + \tan^2 \Delta)$

نکته: در کتاب درسی هر فی از مشتق تابع \cot زده نشده ما هم کاری پوش نذاریم! فقط آله
 تو امتحان \cot زدی نترس! به جاش بنویس $\frac{1}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده

مثال) اگر در کلاس مشتق توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = \sin x \cdot \tan x$

$g(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x}$

$h(x) = \cos^2 x$

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f(x) = \tan^2(x) - 2 \cos(x)$

$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

$f(x) = \sin x \cos 2x$





آزمون یکنوایی توابع

	اگر در یک بازه تابع f صعودی آید باشد، در آن بازه علامت مشتق مثبت است.	$f' > 0$
	اگر در یک بازه تابع f نزولی آید باشد، در آن بازه علامت مشتق منفی است.	$f' < 0$
	اگر در یک بازه تابع مشتق موجود و صفر باشد، در آن بازه تابع f ثابت است.	$f' = 0$

مثال: (مثال کتاب) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی صعودی آید و در چه بازه‌هایی نزولی آید است؟

نقاط بحرانی

نقطه‌ای $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم اگر یا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

توجه اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی به حساب می‌آیند.

پدست آوردن نقاط بحرانی از ضابطه

$f'(x) = \frac{A}{B}$

$\xrightarrow{A=0}$ نقطه درونی دامنه
 $\xrightarrow{B=0}$ باشد، بحرانی هست

مشتق بگیر

T تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در $[-1, 1]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

نقاط اکسترم (نسبی) و مفومش

به ماکزیمم یا مینیمم می‌گویند اکسترم.

مینیمم (ماکزیمم) نسبی نقطه‌ی $x = c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) نسبی برای تابع f می‌گوییم، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض نقاط همسایگی آن باشد.

توجه شرط لازم اکسترم نسبی شدن یک نقطه، وجود همسایگی (راست و چپ) اطراف آن است.

تفسیر فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به فول C اکسترم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

مثال: کنار در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکستریم نسبی، مقدار اکستریم نسبی و مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنید.

الف) $f(x) = ||x| - 2|; x \in [-5, 3]$

ب) $g(x) = -x^2 - 1; x \in [-1, 2]$

آزمون مشتق اول تابع مشتق را درست آورده و تعیین علامت می‌کنیم! علامت مشتق در هر بازه، نوع یکنوایی تابع را مشخص می‌کند با تعیین جهت یکنوایی در جدول، نقاط اکستریم نسبی مشخص می‌شوند.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکستریم نسبی و مقادیر آن‌ها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ بیابید.

مینیمم (ماکزیمم) مطلق نقطه‌ای $x=c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) مطلق برای تابع f می‌گوییم، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض تمام نقاط دامنه‌اش باشد.

توجه برای اکستریم مطلق شدن، وجود همسایگی اهمیتی ندارد، چون عرضش با کل نقاط مقایسه می‌شود.

توجه هر اکستریم مطلق می‌تواند نسبی هم باشد (چه زمانی؟) و هر اکستریم نسبی می‌تواند مطلق هم باشد (چه زمانی؟).

فعالیت کتاب: آیا تابع $y = |x^2 - 1|$ در $[-2, 2]$ دارای اکستریم مطلق است؟ در صورت وجود با رسم نمودار مقادیرشان را بیابید.

روش محاسبه اکستریم‌های مطلق تابع در بازه بسته $[a, b]$

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی آن را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار \max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، \min مطلق.

(مثال کتاب) نقاط اکستریم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

تشخیص نقاط بحرانی در نمودار رسم یک خط مماس، همه چیز را مشخص می‌کند.

در هر کدام از سه حالت زیر در نمودارها، نقطه بحرانی داریم و لاغیرا ببینید:

- خط مماس افقی باشد: مشتق صفر و صفر! مشتق صفر و صفر! مشتق صفر و صفر!
- خط مماس قائم باشد: مشتق ناموجود است! مشتق ناموجود است! مشتق ناموجود است!
- رسم نباشد: مشتق ناموجود است! مشتق ناموجود است! مشتق ناموجود است!

توجه هر اکستریمی بحرانی است، اما هر بحرانی‌ای اکستریم نیست!

بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردن بهترین حالت! مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود

مساحت یا حجم مسائل بهینه‌سازی معمولاً با **یابان فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم** !!

۱. **ن** : نمادگذاری رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوما و نمادهای مجهولات X و Y

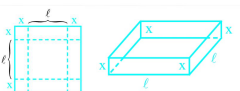
۲. **ف** : f : ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳. **ت** : تک‌متغیرش کن! آله اف دومتغیره بود، تک‌متغیرش کن! (با استفاده از به رابطه از دل سوال!)

۴. **م** : $\max - \min$: عرض اکسترمم (حالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو درست ییارا

مثال: (مثال کتاب) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

مثال (مثال کتاب) مطابق شکل، ورقه‌ی فلزی به طول 3 cm را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از گوشه آن مربع‌هایی کوچک به ضلع x را برش بزنیم و سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار x بقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟



(تمرین کتاب) بزرگ‌ترین بازه از \mathbb{R} که تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ در آن نزولی آید باشد، کدام است؟ چرا؟

(تمرین کتاب) با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، مشخص کنید آید در چه بازه‌هایی صعودی آید و در کدام بازه‌ها نزولی آید؟

(تمرین کتاب) نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$h(x) = \sqrt[3]{x}$

(تمرین کتاب) در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

(تمرین کتاب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

(تمرین کتاب) اگر نقطه $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

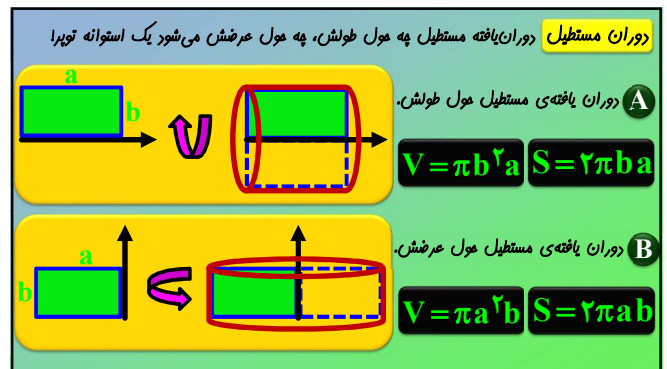
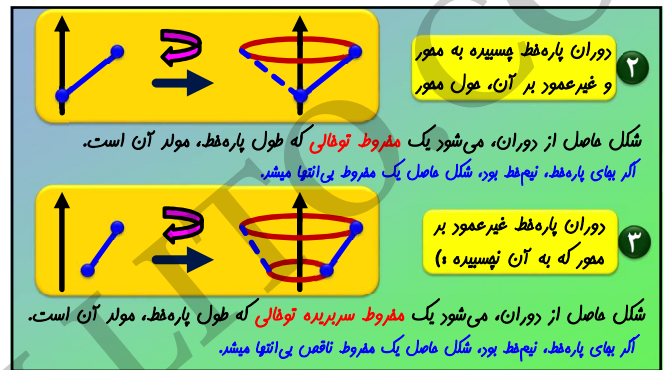
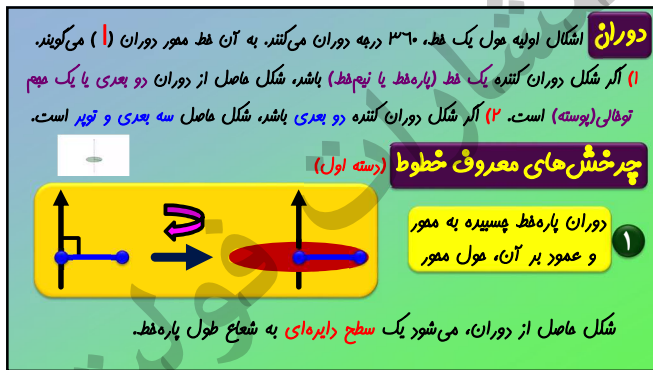
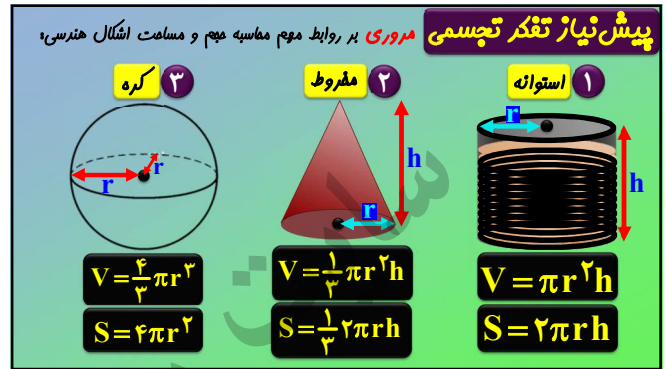
(تمرین کتاب) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب چوبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32 فواید بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2 و حاشیه‌های کناری هر کرام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را فوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

T مجموع اضلاع قائمه مثلث قائم الزویه ای 8 است. کمترین مقدار وتر آن چقدر است؟

$\sqrt{2} (4)$ $3\sqrt{2} (3)$ $4\sqrt{2} (2)$ $2\sqrt{2} (1)$

A





دوران مثلث دوران یافته یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه اش می شود یک مخروط توپرا و اما مهم و مسامحتش!

$V = \frac{1}{3}\pi b^2 a$ $S = \frac{1}{3}\pi b a$

T مثلث متساوی الساقینی با طول ساق ۱۳ و قاعده ۱۰ حول ارتفاع وارد بر قاعده اش دوران می کند. حجم شکل حاصل کدام است؟ (۱) 100π (۲) 50π (۳) 200π (۴) 90π

A

القای برش **اولا پایر براندر** چیزی که شکل را برش می دهد یک صفحه است. فرض کن یک چاقو شکل را می بُرد. سطح مقطع بخشی از صفحه برش دهنده است و در واقع اشتراک این صفحه با شکل هندسی می باشد.

توجه! معمولاً یک شکل سه بعدی (مهم فضایی) را می دهند و سطح مقطع حاصل از برش آن شکل توسط یک صفحه را می خواهند! **توجه** به **توپر** یا **توبالی** بودن مهم فضایی در برش همانند دوران مهم است.

توجه! معمولاً با برش یک **شکل توبالی**، ممیزی از آن شکل باقی میماند سطح مقطع حاصل یک **مهیض** است. اما با برش یک **شکل توپر**، سطح مقطع حاصل، یک **سطح** از آن شکل است.

برش زدن حجم های معروف **۱ استوانه**

A اگر صفحه برش هم از سقف و هم از کف استوانه بگذرد سطح مقطع یک مستطیل است. $S_{max} = 2r \times h$

B اگر صفحه برش بر محور استوانه عمود باشد، سطح مقطع دایره است. $S = \pi r^2$

B اگر صفحه برش بر محور استوانه عمود نباشد و از سقف و کف استوانه بگذرد، سطح مقطع یک بیضی است.

T دو استوانه هم محور به شعاع های ۱ و ۳ روی هم قرار گرفته اند و ارتفاع هر دو استوانه ۲ است. اگر حجم حاصل را با یک صفحه موازی با محور استوانه ها برش دهیم، بیشترین مساحت سطح مقطع حاصل چقدر است؟ (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

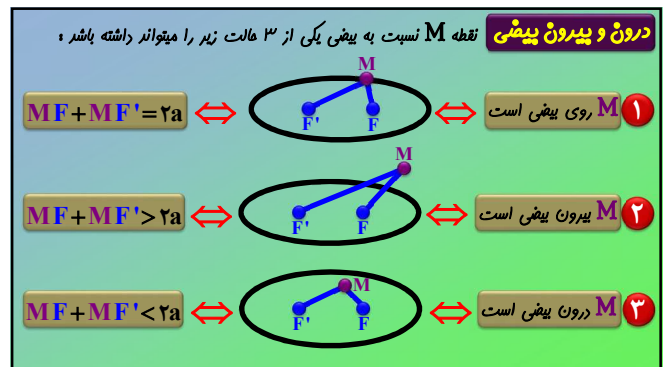
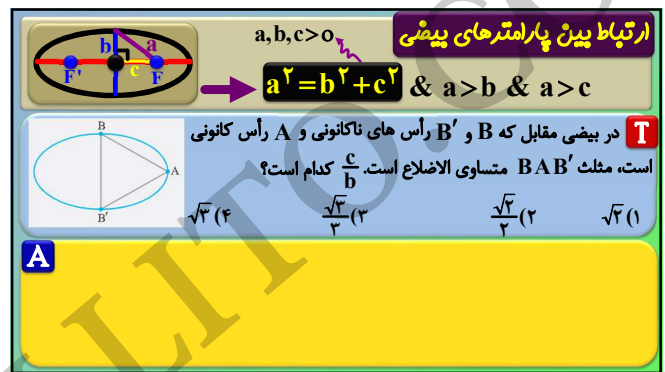
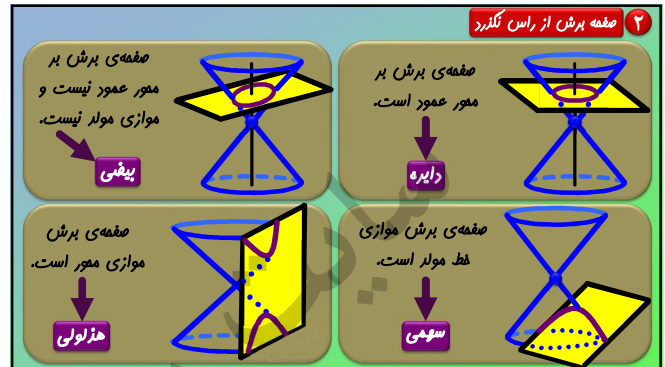
A

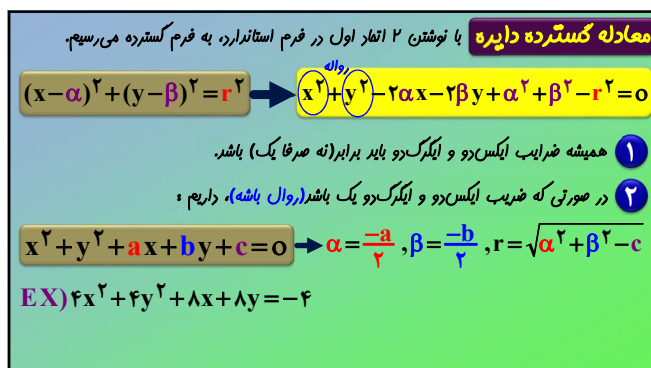
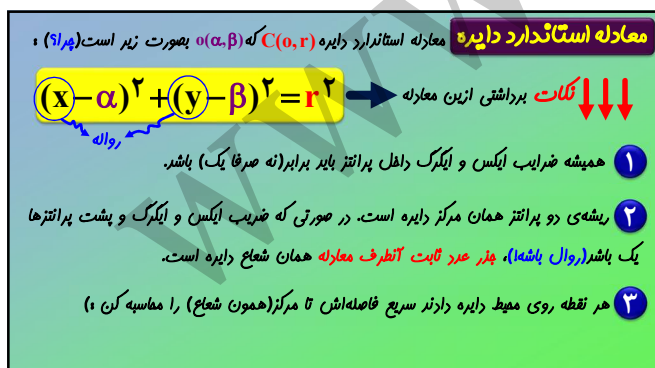
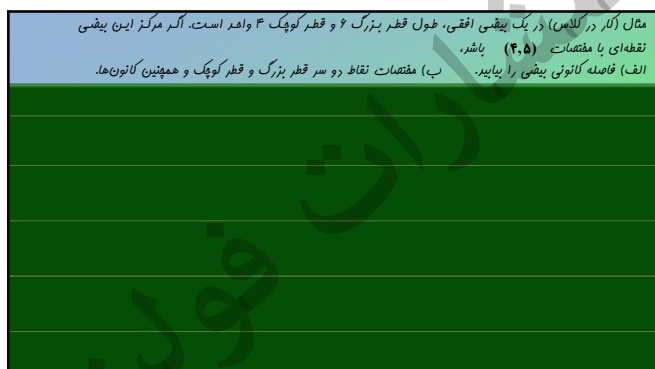
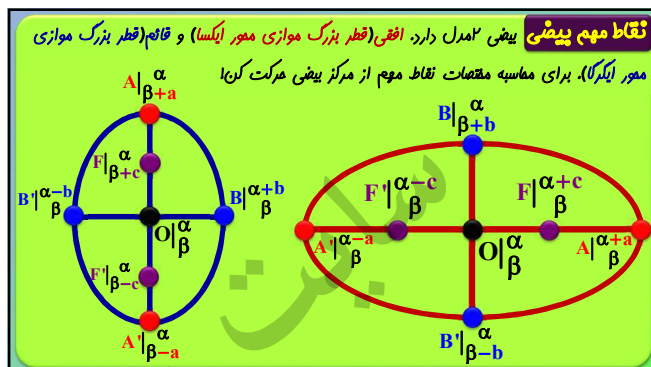
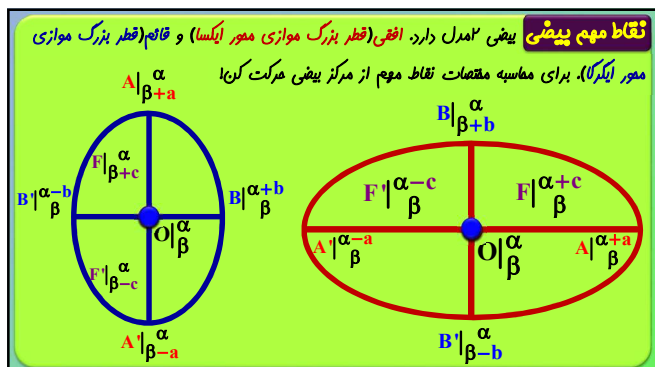
در ادامه برش زدن حجم های معروف می رسیم به **۲ مکعب مستطیل**

A اگر صفحه برش موازی یکی از وجه های مکعب مستطیل باشد، سطح مقطع یک مستطیل است. $S = a \times b$

B اگر صفحه برش از چهار راسی از مکعب مستطیل که در یک وجه نیستند بگذرد، سطح مقطع یک مستطیل است. $S = b \times \sqrt{a^2 + h^2}$

مثال: (تفاهیت کتاب) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکلی است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟





مثال: آمار در کلاس یا کمی شیفتی (۱) معادله گسترده دایره‌ای به شکل $۱۲x^2 + ۳۲y^2 - ۳۲x - ۲۴y = ۱۲$ است. مقصود حرکت و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

تعداد مماس‌های قابل رسم بر دایره

- از داخل دایره ۰
- از روی دایره ۱
- از خارج دایره ۲

$AT = AT'$

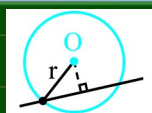
وضعیت خط و دایره

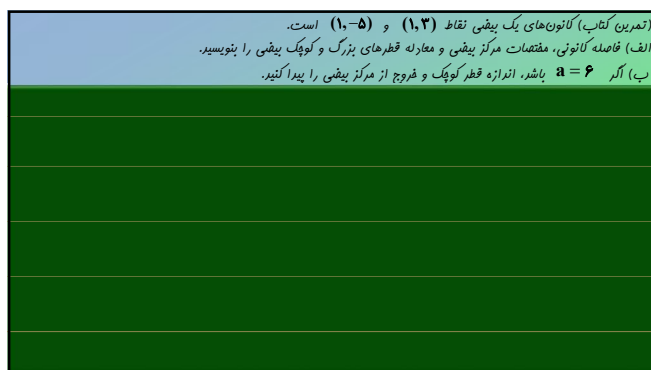
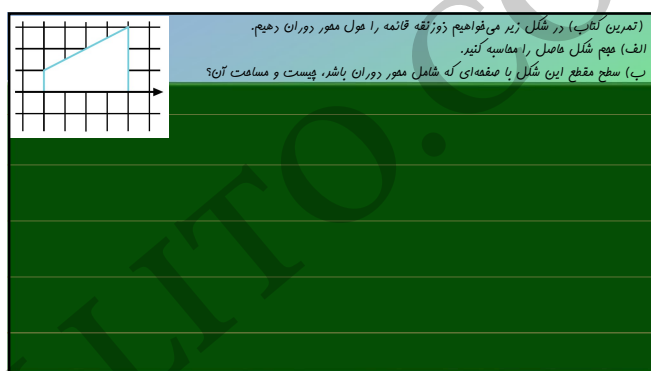
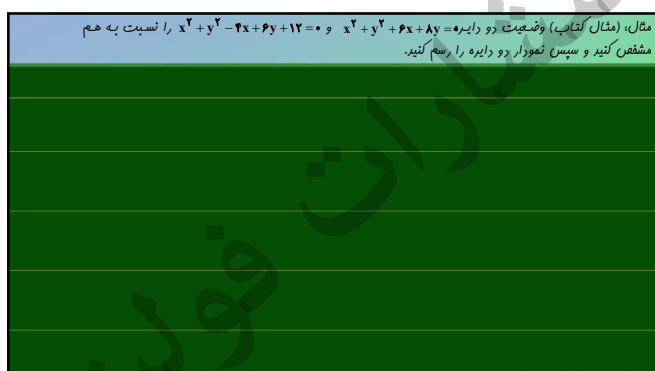
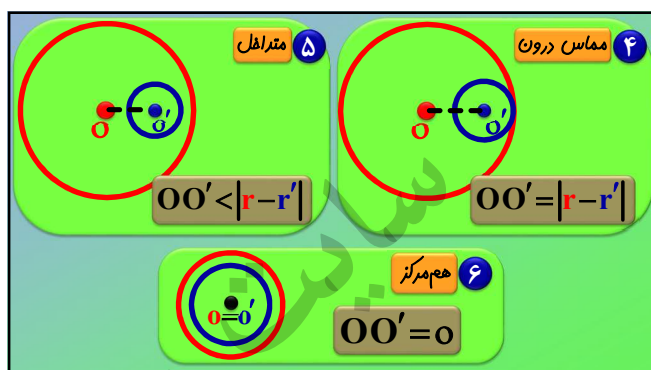
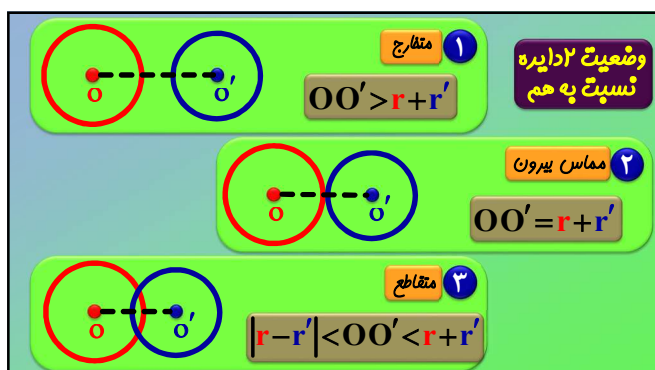
- خط و دایره متقاطعند $OH < r$
- خط بر دایره مماس است $OH = r$
- خط و دایره متقاطع نیستند $OH > r$

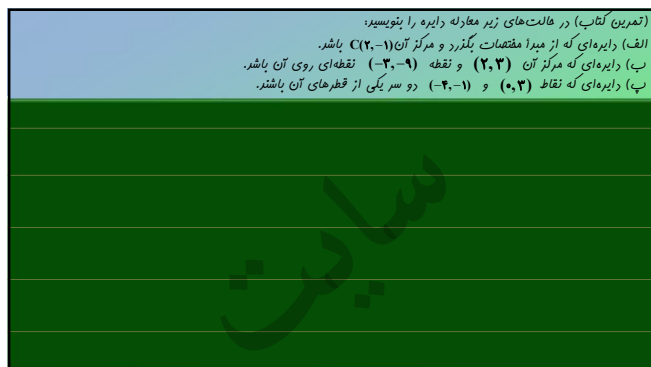
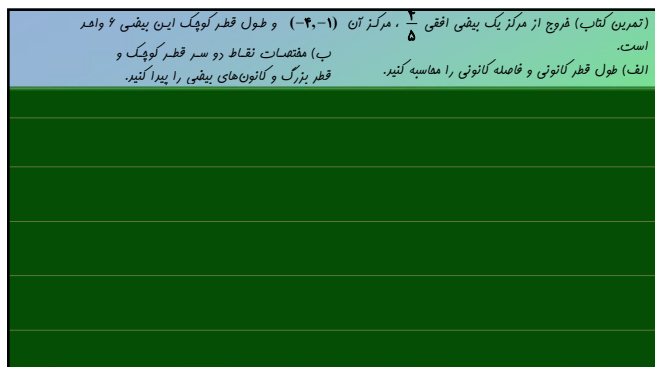
مثال: وضعیت دایره $(۲y + ۶)^2 + (۲x - ۴)^2 = ۱۶$ و خط $۴x + ۳y - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مثال: آمار در کلاس (معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x + ۴y - ۱ = ۰$ مماس بوده و مرکز آن نقطه $C(۱,۲)$ باشد.

مثال: آمار در کلاس (مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲, -۳)$ است. مطابق شکل، این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.









یادآوری

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه‌ای: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن می‌گوییم و با S نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه‌ای از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آن‌ها: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، داریم:

(الف) اجتماع دو پیشامد، پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

(ب) اشتراک دو پیشامد، پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

(پ) تفاضل دو پیشامد، پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

(ت) متمم یک پیشامد، پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد $\Rightarrow p(A') = 1 - p(A)$

۵- رابطه مناسبه احتمال وقوع یک پیشامد: $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

۶- رابطه مناسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

۷- پیشامدهای تاساگر: دو پیشامد A و B را تاساگر می‌گوییم، هرگاه A و B نتوانند با هم رخ دهند، به بیان دیگر $A \cap B = \emptyset$ این صورت داریم: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

۸- تعمیم پیشامدهای تاساگر: پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n را دو به دو تاساگر می‌گوییم، هرگاه هیچ دو تایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند، در این صورت داریم: $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$

۹- احتمال شرطی: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; $(p(B) \neq 0)$

۱۰- پیشامدهای مستقل: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

افراز افراز کردن مجموعه S به این معناست که آنرا به چند زیرمجموعه تقسیم‌بندی کنیم، به‌طوری‌که:

- هیچ زیرمجموعه‌ای تهی نباشد.
- هیچ دو زیرمجموعه‌ای با هم اشتراک نداشته باشند.
- اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌ها بشود خود S .

T برای مجموعه اعداد طبیعی، از افرازهای داده شده، چند تا قابل قبول است؟

(الف) اعداد مضرب ۳ و اعداد زوج (ب) اعداد اول و اعداد مرکب

(پ) اعدادی که مربع کاملند، اعداد فرد و مضارب ۵ (ت) اعداد کوچک‌تر از ۱۳۹۷ و بزرگ‌تر از ۱۳۹۷

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

مثال (مثال کتاب) کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال (مثال کتاب) اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A و B یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال (مثال کتاب) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اعشاری، یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

مفهوم قانون احتمال کل

target

تحت شرایطی...

$\frac{0}{6} =$


قانون احتمال کل وقتی چند اتفاق پشت سرهم می افتد و از ما احتمال یک پیشامد ساده که بعد از این اتفاقات است را می خواهند، از قانون احتمال کل استفاده می کنیم. به این صورت که مسئله را به صورت درختی حالت بندی می کنیم و در هر شاخه با اعمال پیش شرط، احتمال وقوع پیشامد خواسته شده را می نویسیم! معنویت هر شاخه را در هم ضرب و بعد جواب شاخه ها را با هم جمع می کنیم.

T احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، 0.12 و به فرزند دختر 0.08 است. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزند را می کشند. چقدر احتمال دارد این فرزند سالم باشد؟

$0.95(4)$ $0.9(3)$ $0.8(2)$ $0.7(1)$

(مثال کتاب) ۳ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۳ مهره قرار دارد که ۳ تای آن ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آن ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟

مثال: (مثال کتاب) سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سوال، یکی شامل ریاضی، یکی اطلاعات عمومی و دیگری ادبیات ارائه شده است. اگر بسته سوال های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد، اگر بسته سوال های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر اطلاعات عمومی به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد پرتنه فواید شد. در صورتی که با پرتاندن عقربه پرتان در شکل مقابل نوع سوال هایی که به او داده می شود مشخص شود. تعیین کنید او با چه احتمالی پرتنه فواید شد؟



مثال (مثال کتاب) دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سیاه و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سیاه و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می کنیم. به چه احتمالی این مهره سیاه است؟

(تمرین کتاب) دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن ها معیوب اند، درون جعبه دیگر ۹۴ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

(تمرین کتاب) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشد و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلاست؟

