

حسابان ۲

نهایی فول



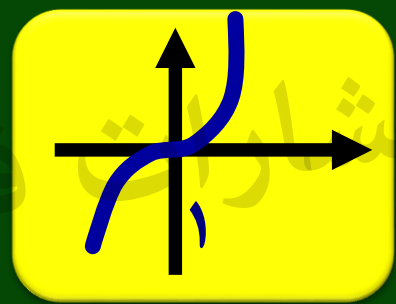


فصل ۱ : تابع

بینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد :

۱ $f(x) + k$

نمودار $f(x)$ را k واحد و در جهت علامت k روی محور y ها حرکت بده!

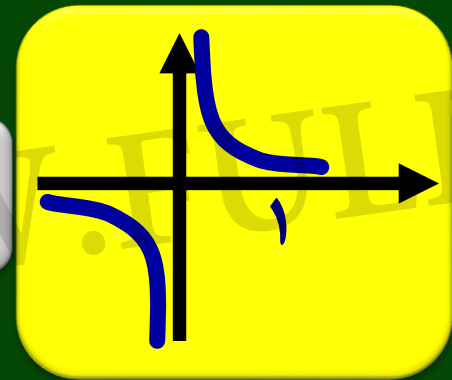


$y = x^3 - 1$

ex

۲ $f(x + k)$

نمودار $f(x)$ را k واحد در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بده!



$y = \frac{1}{x-1}$

ex

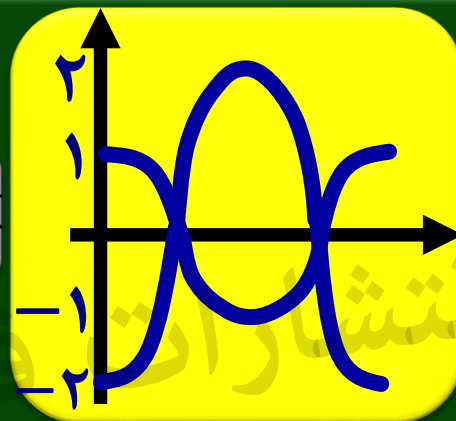
answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

۳ $kf(x)$

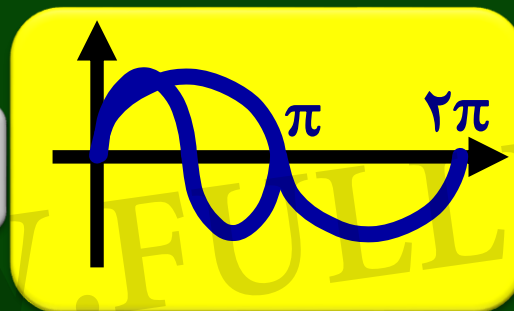
عرض نقاط روی نمودار $f(x)$ را k برابر کن (سقف و کف k برابر شه)



ex $y = -2 \cos x$

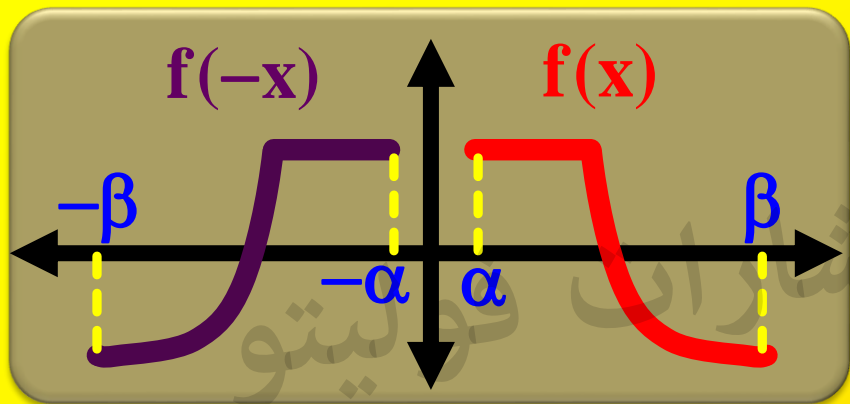
۴ $f(kx)$

طول نقاط روی نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کن (در واقع دامنه $\frac{1}{k}$ برابر شه)



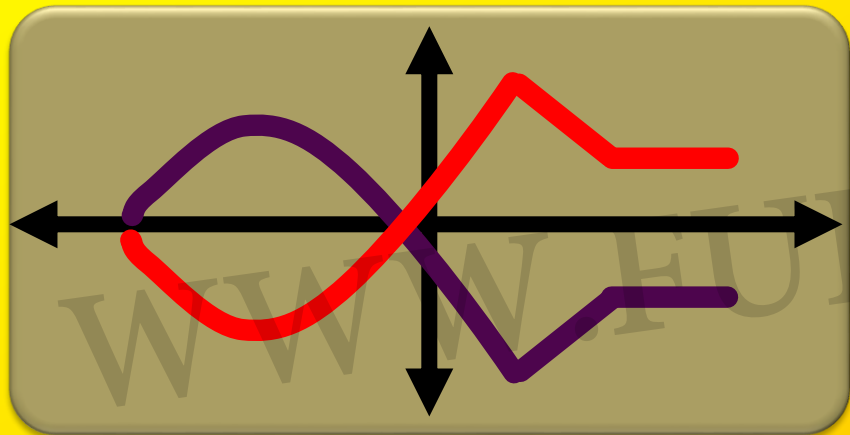
ex $y = \sin 2x$

نکته برعکس!



نمودار تابع $f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

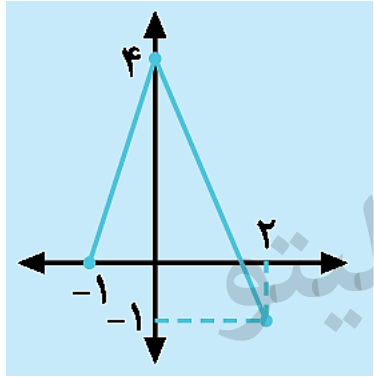
۱



نمودار تابع $-f(x)$ قرینه‌ی نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

۲

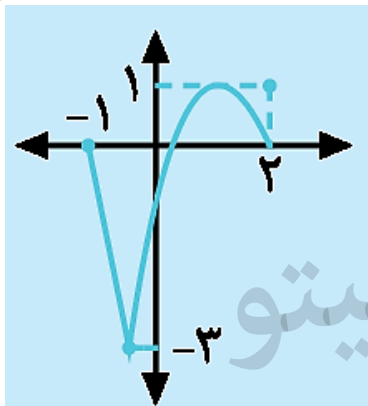
با فولیتو، فولیتو (مثال کتاب با تغییر) در شکل زیر، نمودار $y = f(x)$ داده شده، به کمک آن نمودار $y = -\frac{1}{2}f(x) + 1$ را رسم کنید. www.fullito.com



answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو
WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولیتو g داده شده است. به کمک آن نمودار $g(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.



answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (کلاس) الف نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را با دامنه $[0, 4]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. www.fullito.com

ب) نمودار تابع $k(x) = f(x - 2)$ و $g(x) = f(x) + 3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و بردشان را با f مقایسه کنید.

answer

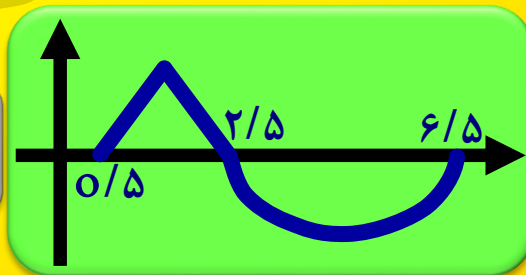
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

روش سرهنگیزه‌ی رسم $f(ax+b)$ یا فولیتو، فولی تو

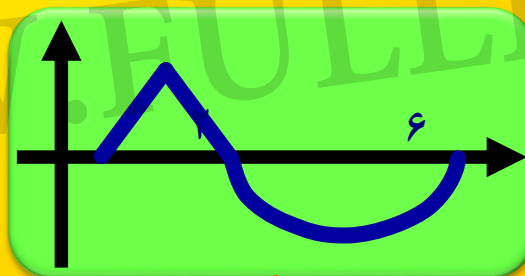
ایکس رو تنها کن و هر کاری داری میکنی تا ایکس تنها شه، دقیقاً همون کارو برای ایکسای نمودار هم انجام بده! دقیقاً همون بلا! نه برعکسش و اینا!

ex نمودار $f(x)$

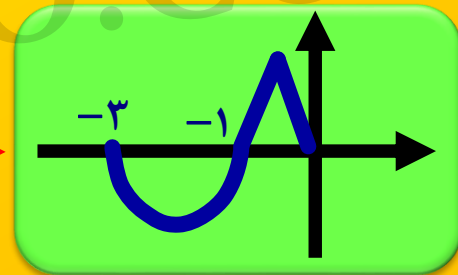


نمودار $f(-2x+0/5)$
را به دست آورید پیلینز :

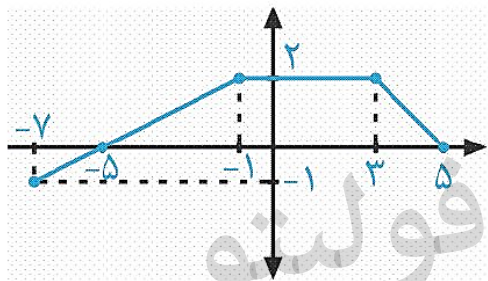
ایکس رو تنها کن
(اول منهای نیم)



$\div (-2)$



answer



مثال) (مثال کتاب درسی) اگر نمودار تابع $g(x) = f(2x+1)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع f را به کمک آن رسم کنید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

تایع چند جمله‌ای

توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می آیند!

توانی مساوی از ایکس

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$$

ضربش!

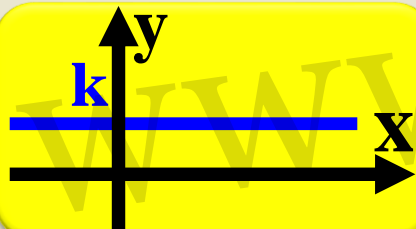
یه جملش!

درجه یک چند جمله‌ای رو
بزرگترین توانش مشخص میکنه!

$$f(x) = -3x^4 + 5x^5 - 3 \xrightarrow{\text{درجه}} 5$$

$$f(x) = 2x^8 - 3x - \frac{1}{x} + 3 \xrightarrow{\text{درجه}} \text{❌}$$

توابع چند جمله‌ای خاص



۱ تابع ثابت ضابطه‌ی آن $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.



$f(x) = (m^3 - 6m^2 + 12m - 8)x^2 - (n^2 - mn - 3)x + \sqrt{-mn}$ تابعی ثابت است. $m + n$ ؛

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

۲

تابع خطی

ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدا d

پُر واضح است که تابع خطی یک چند جمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

تابع f با ضابطه $f(x) = (a-2)x^2 + bx + c - 2$ بیانگر یک تابع خطی است که در نقطه ای

به عرض ۱- محور عرض ها را قطع کرده است. این تابع در ربع سوم با محورهای مختصات، مثلی

با مساحت ۲۴ ایجاد کرده است. مقدار b کدام است؟ $(1) \frac{1}{24}$ $(2) \frac{1}{48}$ $(3) -\frac{1}{48}$ $(4) -\frac{1}{24}$

A

با فولیتو، فولی (فولایت) الف) نمودار تابع $f(x) = x^3$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. www.fullito.com

ب) به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^3$ ، نشان دهید f وارون‌پذیر است.

پ) نمودار f^{-1} و ضابطه آن را به دست آورید.

answer

با فولیتو، فولیتو (مثال) (کار در کلاس کتاب) نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

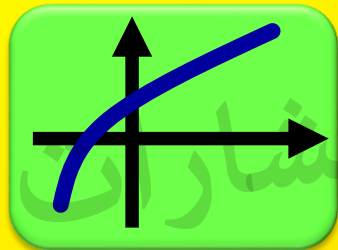
WWW.FULLITO.COM

از نظر یکنوایی یک تابع به مدل‌های زیر تبدیل می‌شود :

۱

صعودی اکید

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



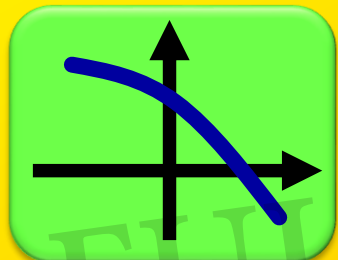
با افزایش مقدار **x** ، مقدار **y** افزایش می‌یابد

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 8)\}$$

۲

نزولی اکید

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

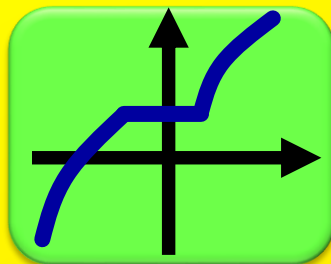


با افزایش مقدار **x** ، مقدار **y** کاهش می‌یابد

$$f = \{(1, 8), (2, 5), (3, 4)\}$$

به توابع نزولی اکید یا صعودی اکید، **یکنوای اکید** (اکیدا یکنوا) می‌گویند.

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 8)\}$$

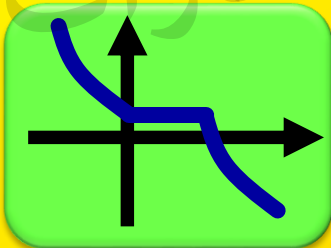


$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

صعودی

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y**
افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

$$f = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4)\}$$



$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

نزولی

با افزایش مقدار **x**، مقدار **y**
کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.

به توابع نزولی یا صعودی، **یکنوا** می‌گویند!

به توابعی که نه یکنوا و نه **یکنوا** می‌گویند!

$$\begin{array}{r} f(x) \quad | \quad g(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$

باقیمانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

درجه n m $n-m$ $m-1$ حداکثر

ex $3x^3 - 2x + 1 \quad | \quad x^2 + 2$

WWW.FULLITO.COM

$$ax+b=0 \rightarrow x=\frac{-b}{a} \rightarrow r=f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

باقیمائده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$

T اگر عبارت $f(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $x-1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $2x+2$ ، برابر -12 باشد، مقدار ab کدام است؟
 $20(1)$ $10(2)$ $-20(3)$ ✓ $-10(4)$

A

آشنایی با ۳ اتحاد چقدر و بدیدن!!

۱- برای n های زوج و فرد داریم: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

ex $x^5 - 32$

ex $x^4 - 1$

۲- برای n های فرد، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

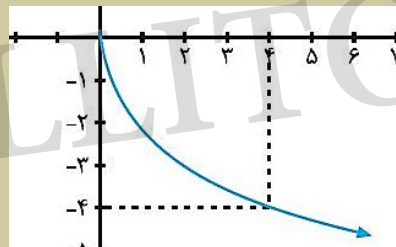
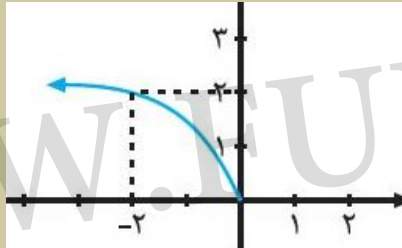
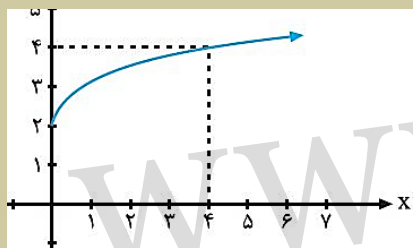
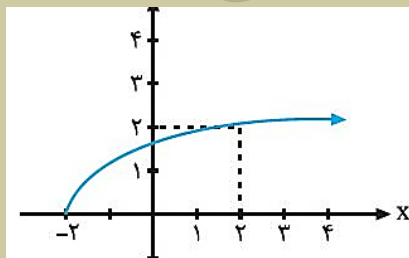
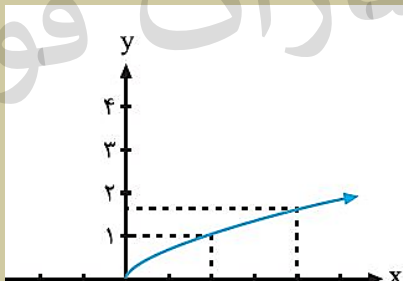
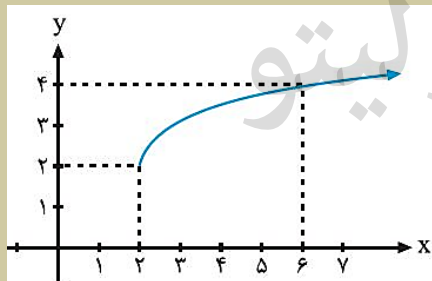
ex $x^5 + 1$

۳- برای n های زوج، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots - a^{n-1})$

ex $x^4 - 16$

حل نمونه سوال پیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

(تمرین کتاب) توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y = \sqrt{x}$ هستند. هریک از آن‌ها را به نمودارش نظیر کنید.



الف) $y = \sqrt{x+2}$

ب) $y = 2 + \sqrt{x}$

پ) $y = -2\sqrt{x}$

ت) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

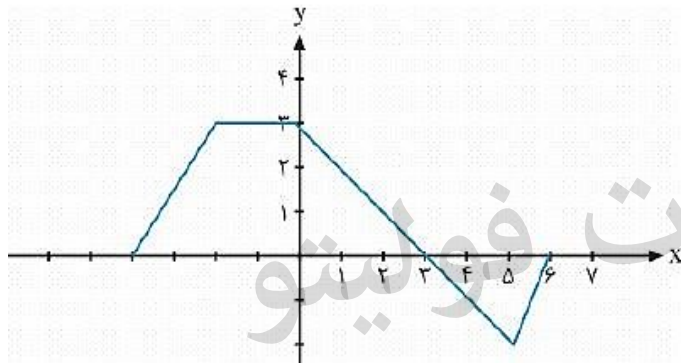
ث) $y = 2 + \sqrt{x-2}$

ج) $y = \sqrt{-2x}$

(تمرین کتاب) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2f(x - 1)$

ب) $y = f(2x - 1)$

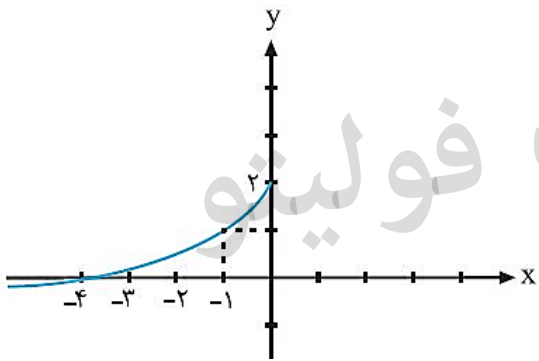


WWW.FULLITO.COM

(تمرین کتاب) نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه‌ی

این تابع را بنویسید.

answer



WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) تابع $f(x) = (x - 2)^3 + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید. پ) ضابطه‌ی f^{-1} را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب درسی) نمودار توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{2-x}$ ب) $g(x) = 2^{-x}$

answer

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو
(تمرین کتاب) اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $x^2 + kx + 2$ بر $x - 2$ برابر ۶ باشد، k را تعیین کنید.

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $(x + 1)$ بخش پذیر باشد.

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل‌های فواسته شده تجزیه کنید.

ج) $x^5 + 32$ با $x + 2$ عامل

ب) $x^6 - 1$ با $(x + 1)$ عامل

الف) $x^6 - 1$ با $x - 1$ عامل

answer

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی

و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

با فولیتو، فولی تو
اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم

چند جمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید. **نهایی ۱۴۰۲**

answer

ریاضیت با من



فصل ۲ :

مشقات

[نہایی فول]

دوره تناوب توابع مثلثاتی

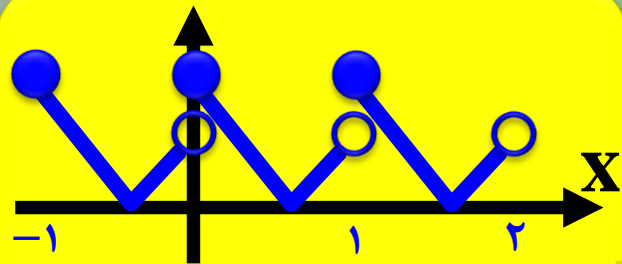
با فولیتو، فولی تو

مفهوم دوره تناوب

به تابعی که نمودارش به ازای یک طول مشخص تکرار شود، متناوب میگوییم.

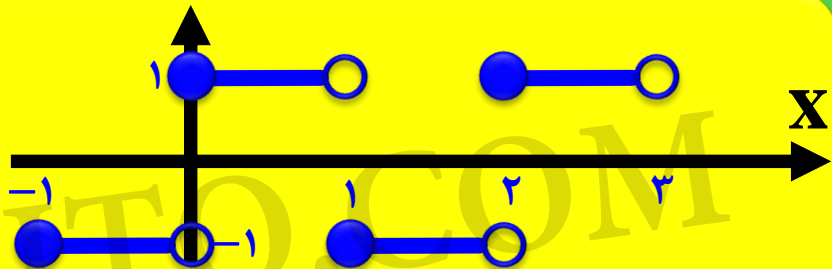
به کوچکترین طولی که نمودار تابع در آن تکرار می شود، دوره تناوب آن میگوییم و با T نشانش میدهیم!

$$T \in \mathbb{Q}$$



$$T=1$$

$$y = (-1)^{[x]}$$



$$T=2$$

$$k \sin(ax+b)+c$$

$$k \cos(ax+b)+c$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$k \tan(ax+b)+c$$

$$k \cot(ax+b)+c$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

T دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = 3 \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 1$ با دوره تناوب کدام تابع زیر برابر است؟

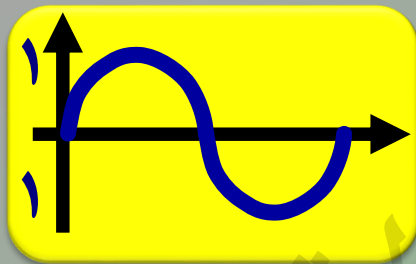
✓ $f(x) = 3 \tan\left(\frac{x+2}{4}\right) (2$ $f(x) = 4 \cos(2x+1) - 4 (1$

$f(x) = 2 \tan\left(\frac{x}{4}\right) - 2 (4$ $f(x) = \sin\left(\frac{1-2x}{4}\right) (3$

$$y = \sin x$$

۱

توابع مثلثاتی



$$y = \sin x$$
$$x \in [0, 2\pi]$$

$$D_{\sin x} = \mathbb{R}$$

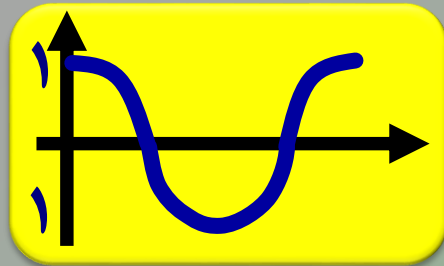
$$R_{\sin x} = [-1, 1]$$

$$EX) y = 2 \sin(\pi x) - 1$$

$$y = k \sin(ax+b) + c$$

$$\max = |k| + c$$

$$\min = -|k| + c$$



$$y = \cos x$$

$$x \in [0, 2\pi]$$

$$D_{\cos x} = \mathbb{R}$$

$$R_{\cos x} = [-1, 1]$$

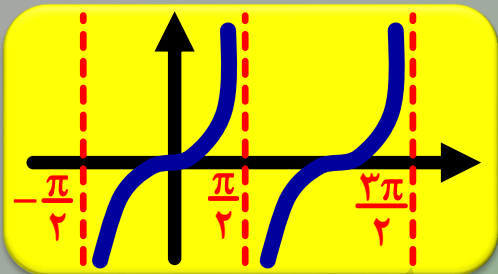
$$\text{EX) } y = -3 \cos\left(-\frac{x}{2}\right) + 1$$

WWW.FULLITO.COM

$$y = k \cos(ax+b) + c$$

$$\max = |k| + c$$

$$\min = -|k| + c$$



$$R_{\tan x} = \mathbb{R}$$

$$D_{\tan x} : x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$EX) y = \left| \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|$$

WWW.FULLITO.COM

$$y = 3 \sin(2x) - 2 \quad (\text{الف})$$

answer

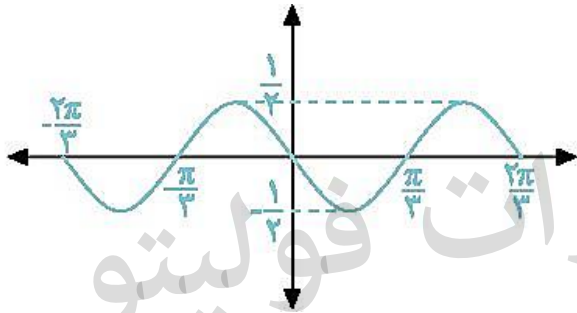
answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

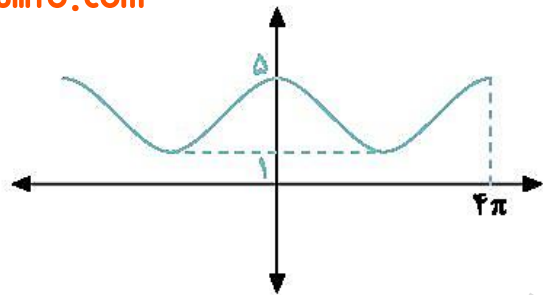
با فولیتو، فولیتو (سایت رسمی انتشارات فولیتو) هر یک از نمودارهای زیر مربوط به $y = a \sin bx + C$ یا $y = a \cos bx + C$ است. با min و max و دوره تناوب، ضابطه هر کدام را مشخص کنید.

الف)



answer

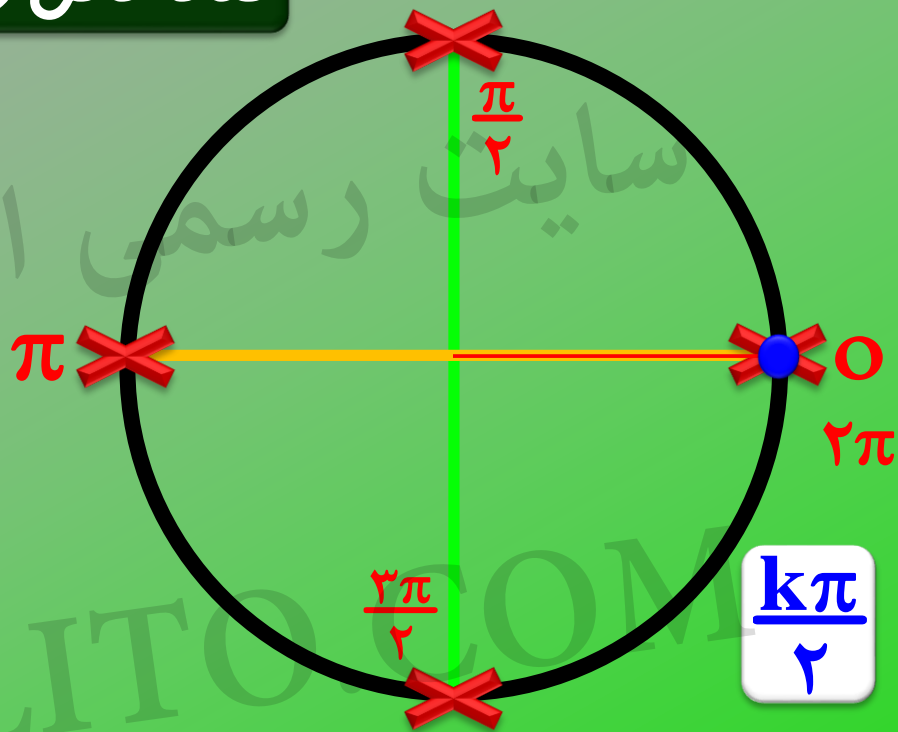
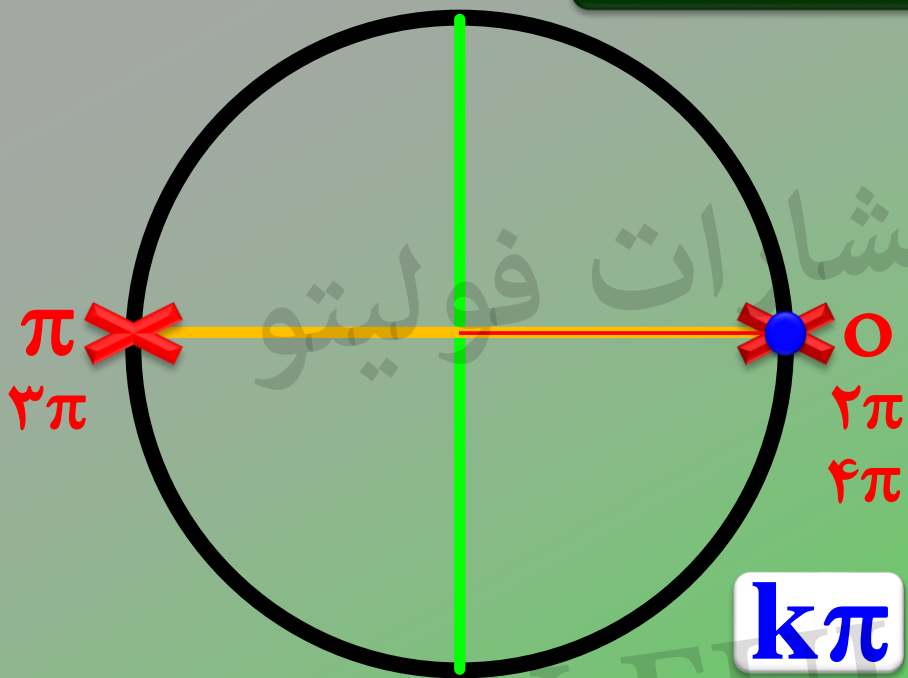
WWW.FULLITO.COM



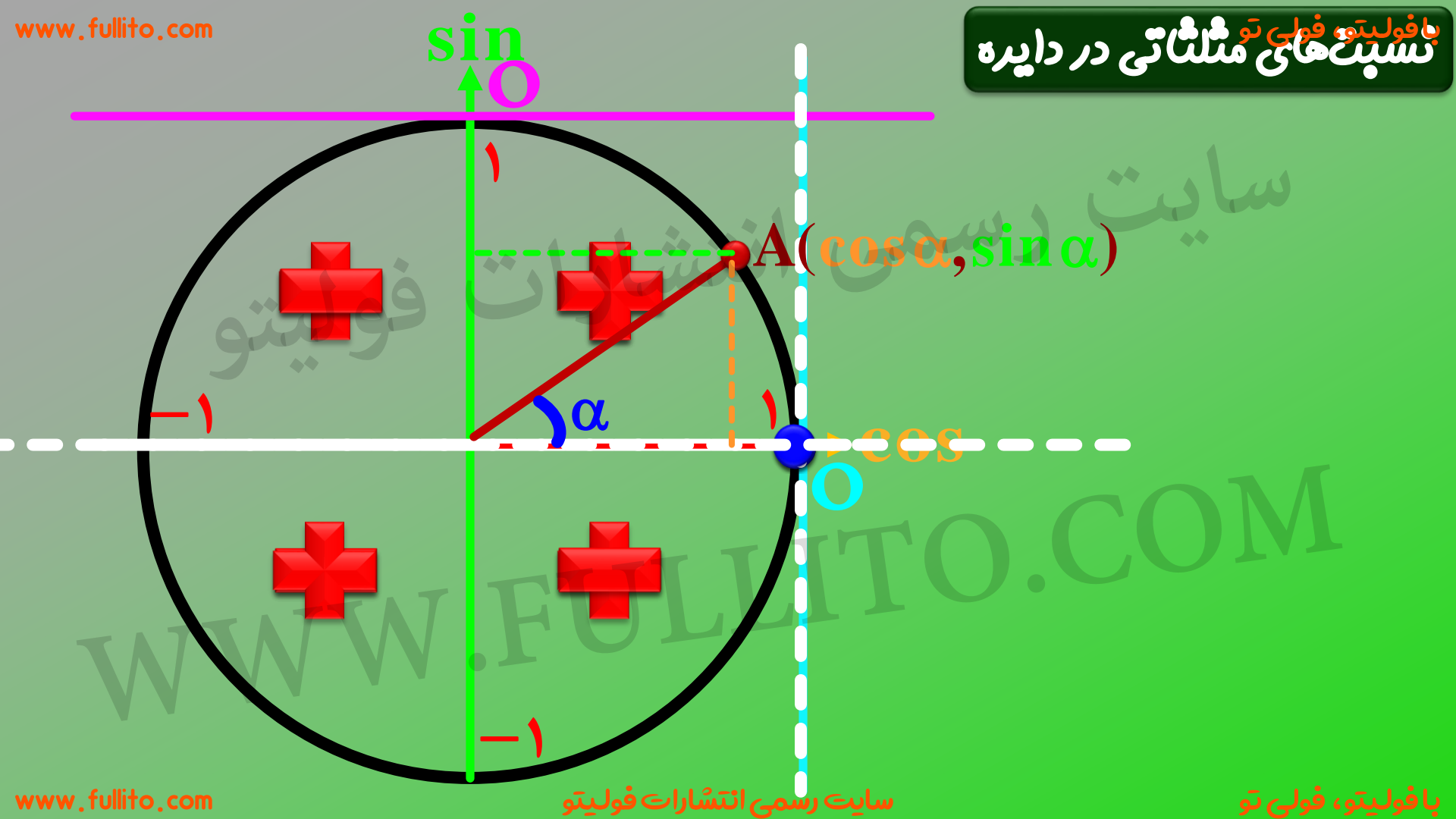
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

نقاط خاص روی دایره مثلثاتی



$\Rightarrow D_{\tan x} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \frac{(\text{فرد})\pi}{2}$ $D_{\cot x} : x \neq k\pi \rightsquigarrow \frac{(\text{زوج})\pi}{2}$



$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha \begin{cases} \longrightarrow = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \longrightarrow = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \longrightarrow = 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو
WWW.FULLITO.COM

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

معادلاتی که در آنها مجهول در کمان نسبت مثلثاتی قرار دارد ۳ مدل کلی دارند :

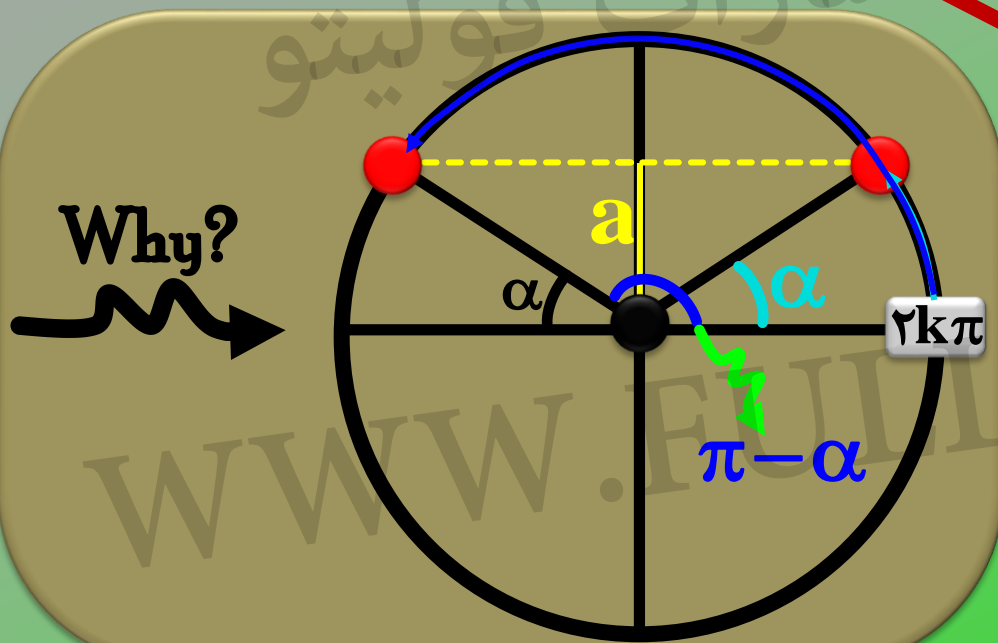
۱

$$\sin x = a = \sin \alpha$$

$$x = 2k\pi + \alpha$$

or

$$x = 2k\pi + \pi - \alpha$$



الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو Sin نکته؛ اگر مساوی یک عدد منفی شد کاری به منفی نداشته باشید، زاویه α را به دست بیاورید بعد منفی را بپذیرید داخل

$$\text{ب) } 4 \sin x + \sqrt{8} = 0$$

answer



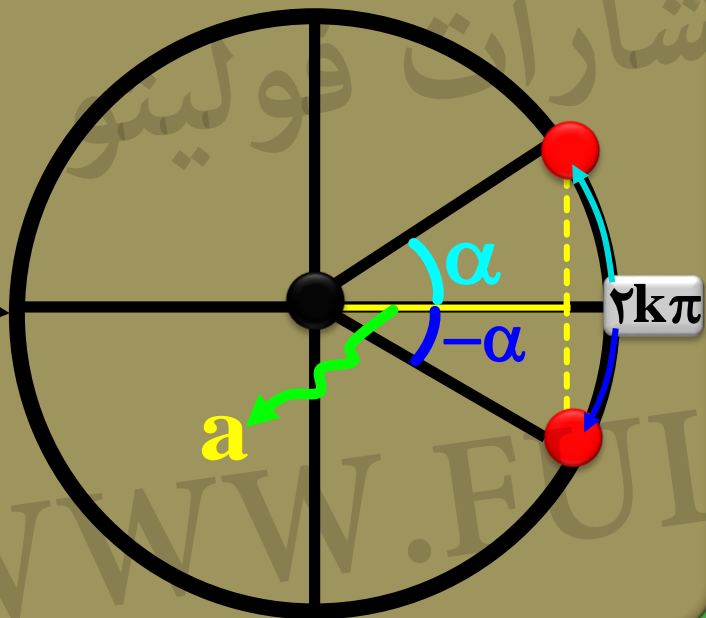
$$\cos x = a = \cos \alpha$$



$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow x = ?$$

Why?



answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو، Cos مساوی یک عدد منفی شد، کاری به منفی نداشته باشید و زاویه α را بیاورید.

$$\text{ex) } \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

در نهایت جلوی Cos بنویسید. $\pi - \alpha$

(تمرین کتاب) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$$

answer

answer

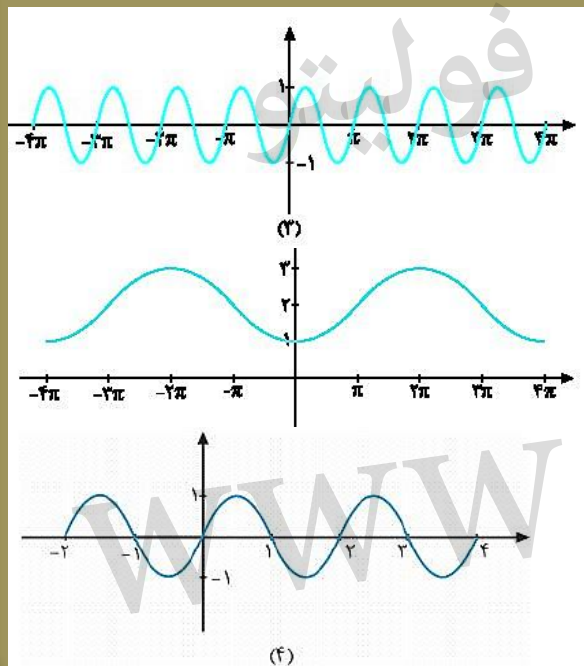
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$

پ) $y = \sin 2x$



(تمرین کتاب) هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو
FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید. www.fullito.com

الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

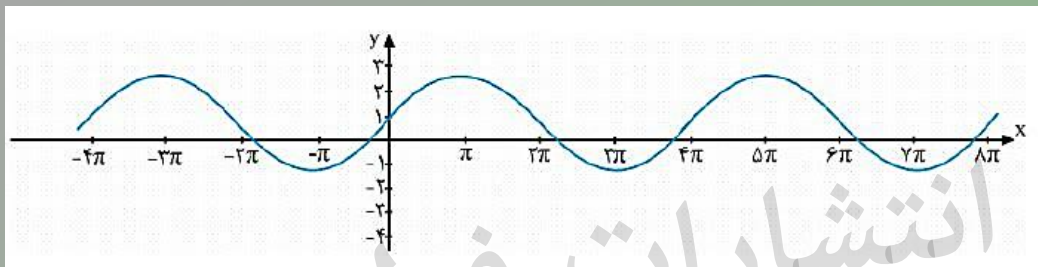
ب) $I = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

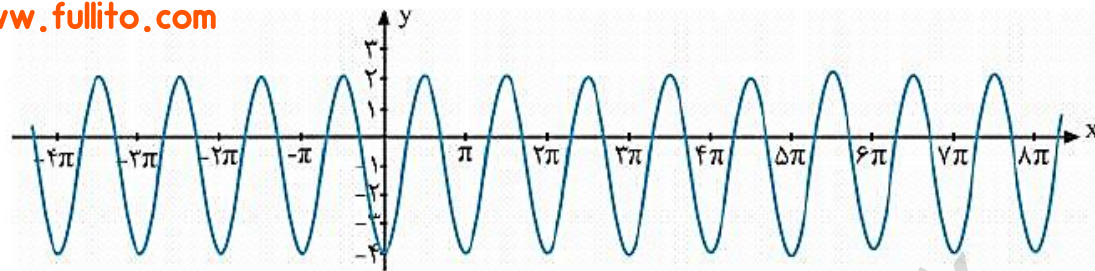
WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو
(تمرین کتاب) ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



(الف)

answer



answer

با فولیتو، فولی کتاب (کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

answer

(تمرین کتاب) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید

(الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

answer

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

(تمرین کتاب) فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

الف) $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

ت) $\cos 2x + \sin x = 0$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

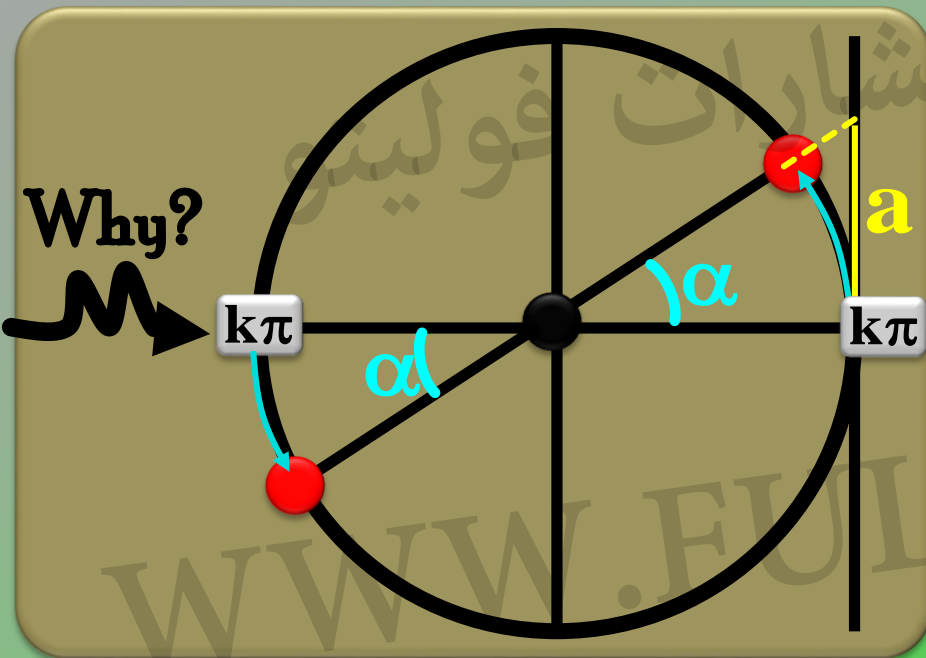
$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$\tan x = a = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$



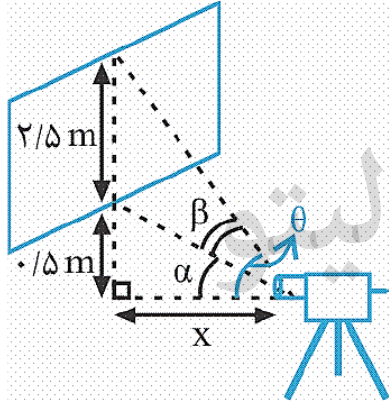
$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \rightarrow x = ?$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو، (فولی تو) نشان دهید در شکل روبه‌رو، رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن تا تابو نشان می‌دهد. به صورت $\tan \beta = \frac{2/5x}{x^2 + 1/5}$ است. سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.



answer

WWW.FULLITO.COM

مثال: معادله مثلثاتی $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

answer

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$\tan(2x - 1) = 0$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$\tan \sqrt{x} = \tan(\pi x)$$

با فولیتو، فولی تو (مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشد،
آن گاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

ریاضیت با من



فصل ۳ :

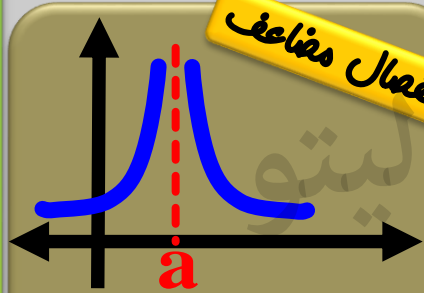
حد

[انہابی فول]

حد نامتناهی (حد پی نهایت)

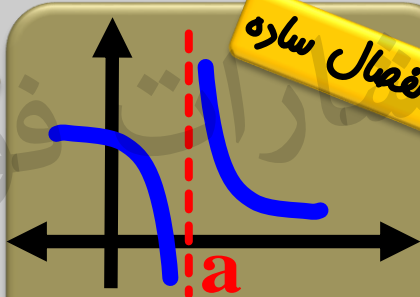
گاهی وقتی ایکس به یک عدد میل می کند (از یک یا دو طرف)، حاصل حد به بی نهایت میل می کند! ببینید:

انفصال مضاعف

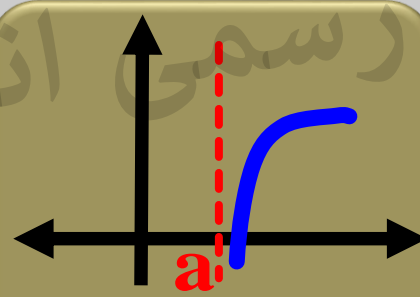


$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

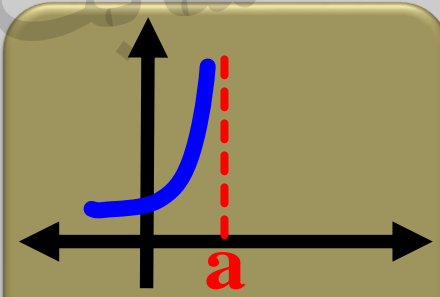
انفصال ساده



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

هرکدام از حدود بالا در a ، به حد نامتناهی!

خط قائم $x=a$ در هرکدام از نمودارهای بالا یک مجانب قائم برای تابع f می باشد!

با فولیتو، فولی تو

مساب: (مساب کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ را رسم کنید و به وسیله آن، حد چپ و راست این تابع $x=2$ را در بیابید.

www.fullito.com

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

سایت رسمی انتشارات فولیتو

www.fullito.com

با فولیتو، فولی تو

با فولیتو، فولی تو
قضیه: عدد به روی صفر بی نهایت میشود اما باید صفر مفرج رو تعیین علامت کنید...

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

answer

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$$

WWW.FULLITO.COM

مثال (مثال کتاب) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x+1)}{\tan x}$ را به دست آورید.

answer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = ?$$

WWW.FULLITO.COM

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 + x}{x^2} \right) = ?$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{(x^2 + 4x + 4)} = ?$$

WWW.FULLITO.COM

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = ?$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (مثال کتاب) کدام یک از فصول $x = -1$ و $x = 3$ مجانب‌های قائم $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می‌باشند.

answer

با فولیتو، فولیتو فولیتو
www.fullito.com مثال (مثال کتاب) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی ممانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

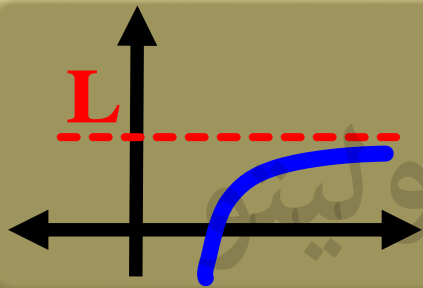
با فولیتو، فولی تو (مثال) کلاس در کلاس با شیطنت من! مبالغه‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$ را بیابید.

answer

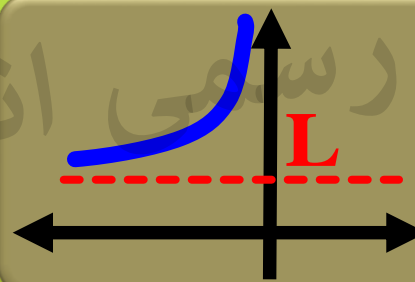
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

گاهی وقتی ایکس به $+\infty$ یا $-\infty$ میل میکند، عدد مساوی یک عدد می شود که همان عدد در بی نهایت است!



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

خط افقی $y = L$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک مجانب افقی برای تابع f می باشد!

هشدار! شرط لازم برای اینکه بتوانیم عدد در بی نهایت تابعی را حساب کنیم این است که دامنه اش

حداقل از یک طرف بی کران باشد!

ex $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - x^2}$

هم ارزی پد توان! وقتی ایکس (پایه) به بی نهایت میل می کند، یک عبارت (که متشکل از جمع

و تفریق چند جمله است) هم ارز جمله ای با بیشترین توان است!

$$\text{if } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow 4x^2 - 5x - 7x^3 + 4 \sim -7x^3$$

$$\text{if } x \rightarrow 0 \Rightarrow -2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{x}\right) \sim -2\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\text{if } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow |x^3 + x| \sim x^3, \sqrt[3]{4x^4 - 2x} \sim \sqrt[3]{4x^4}, {}^3x^2 + x \sim {}^3x^2, \sqrt{x^2 + x} \sim \sqrt{x^2}$$

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + x - 1}$ چقدر از $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x + 5}{4x - 3}$ کمتر است؟

$$5(4)$$

$$-1(3)$$

$$-5(2)$$

$$1(1)$$

A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^3 - 2x - 9}{3x^2 - 8x + 1}$$

(الف)

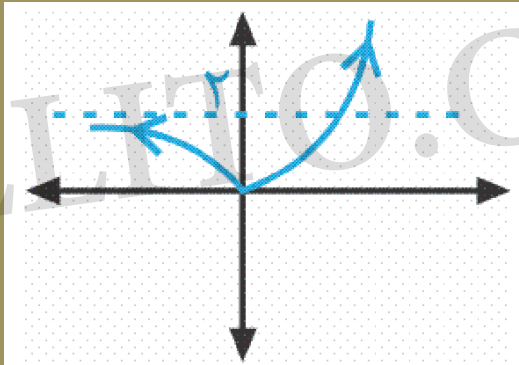
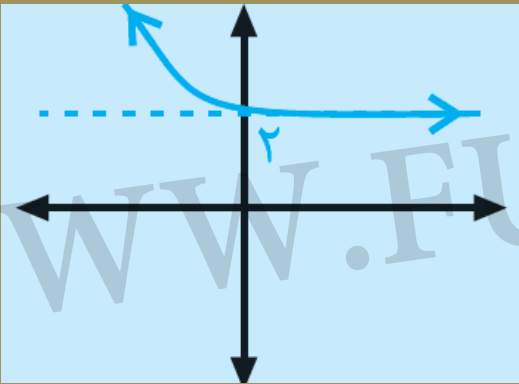
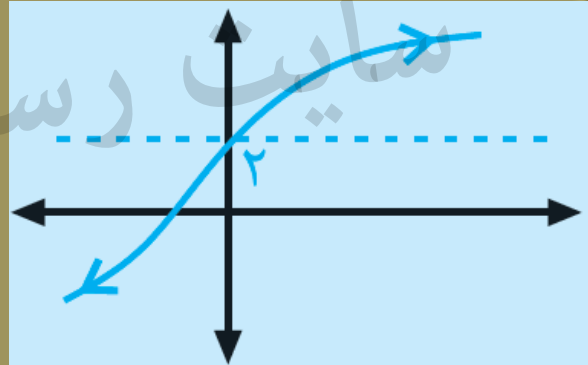
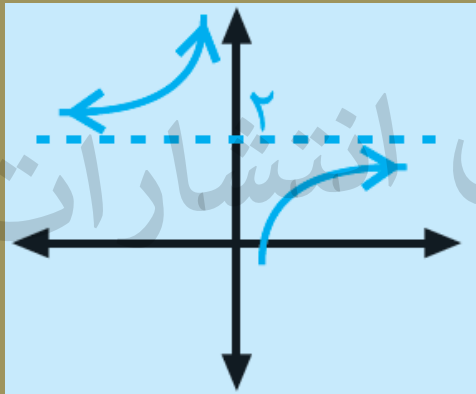
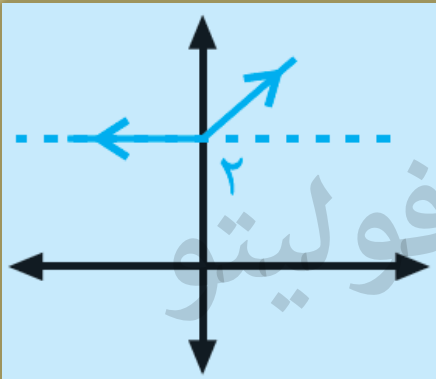
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$$

(ج)

با فولیتو، فولی تو (مثال) (کار در کلاس کتاب) کدام یک از نمودارهای توابع زیر مبنای افقی دارند؟



با فولیتو، فولیتو (مثال کتاب) ممانب‌های افقی و قائم تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را به دست آورید.

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 5x}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

میاناب قائم‌های تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$g(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x}$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

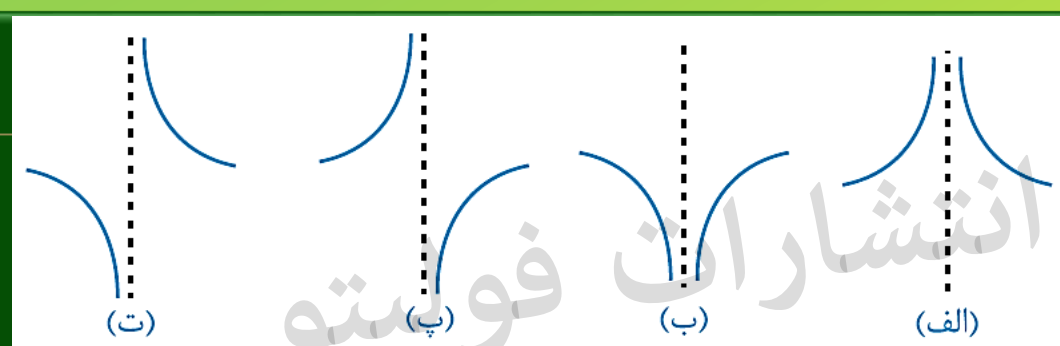
با فولیتو، فولی تو (تقریب کتاب) نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ در مجاورت ممانب قائم خود چگونه است؟

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی کتاب (ممرین کتاب) کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x = 1$ نشان می‌دهد؟ چرا؟ www.fullito.com



(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$$

(ب)

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$$

(ت)

$$\text{الف) } y = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

answer

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

www.fullito.com
ب) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

www.fullito.com

$$پ) y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

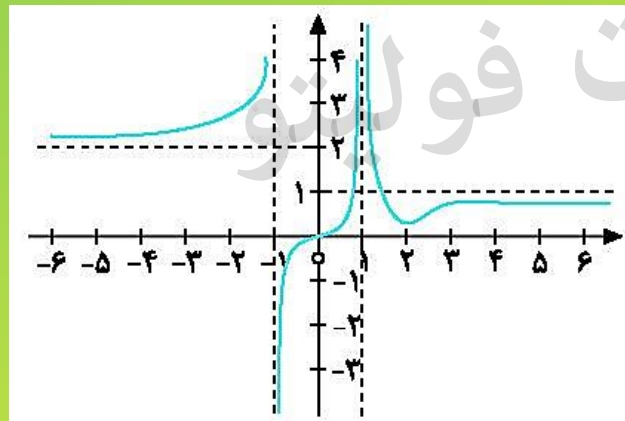
WWW.FULLITO.COM

www.fullito.com
$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) نمودار تابع آبه شکل زیر است. هرود خواسته شده را بنویسید.



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

(ت)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

(پ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(ج)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

(ث)

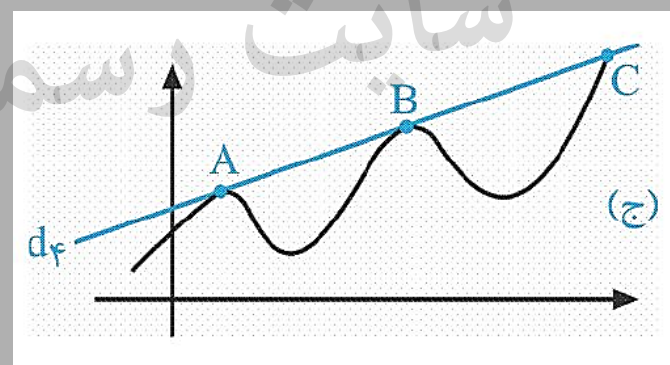
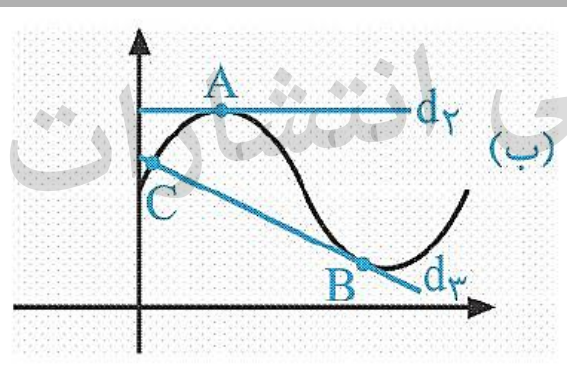
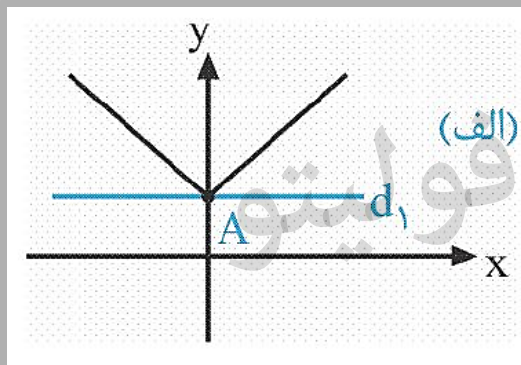
ریاضیت با من



فصل ۴ :

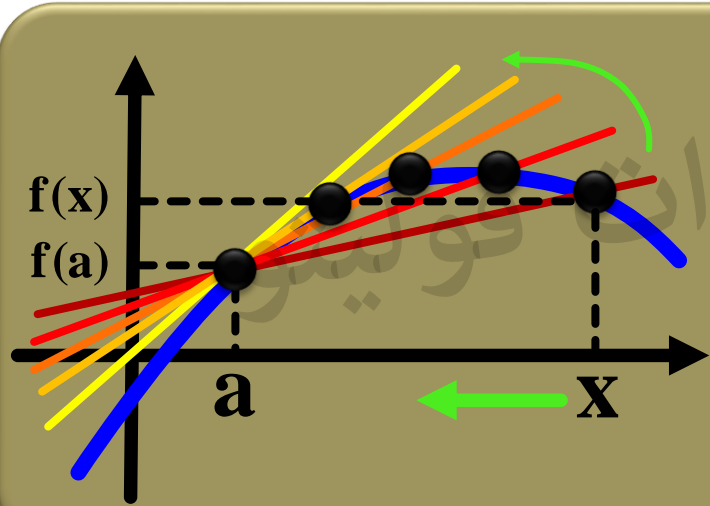
مشق [نهایی فول]

خط مماس بر یک منحنی به روایت تصویر!



WWW.FULLITO.COM

مشتق تابع در a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع در a می باشد.



$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگرش

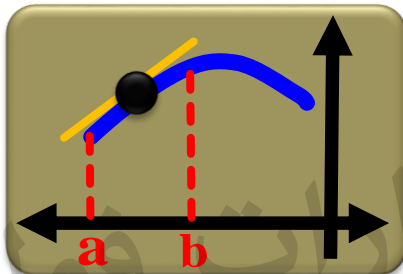
$$x - a = h \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

WWW.FULLITO.COM

مثال: (مثال کتاب) معادله خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 10x$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر منحنی بیابید.

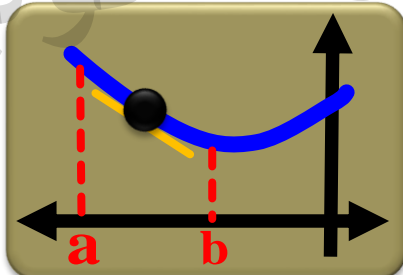
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM



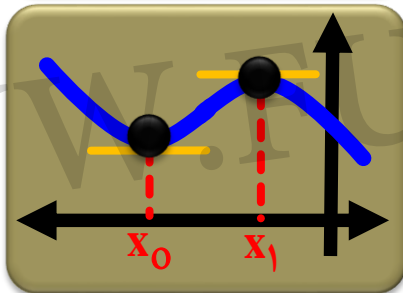
اگر در یک بازه تابع اف صعودی اکید باشد،
در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$$f' > 0$$



اگر در یک بازه تابع اف نزولی اکید باشد،
در آن بازه علامت مشتق منفی است.

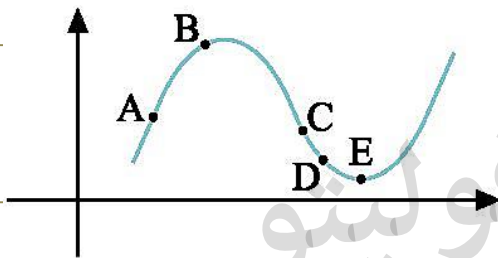
$$f' < 0$$



در قله یا قعر نمودار تابع، خط مماس افقی
و در نتیجه مقدار مشتق آنجا صفر است.

$$f' = 0$$

مکان؛ فرض کنید شیب نقاط مشخص شده در منفی زیر، $-5, -1, 0, 2, 4$ هستند. مشخص کنید کدام شیب مربوط به کدام نقطه است؟

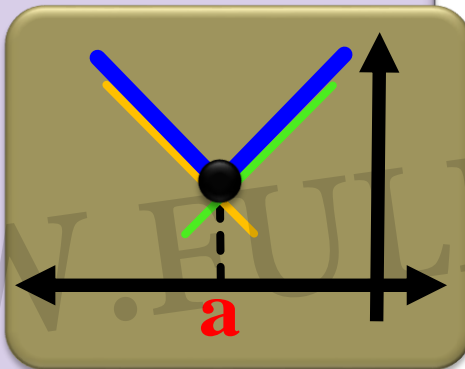
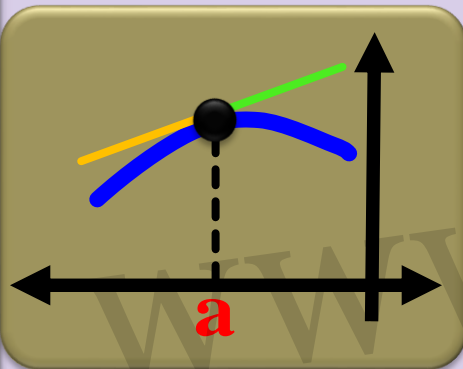


WWW.FULLITO.COM

شیب نیم‌ماس چپ

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

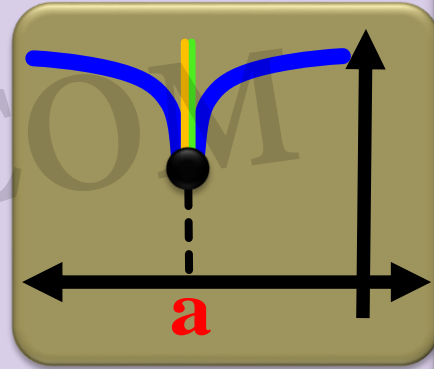
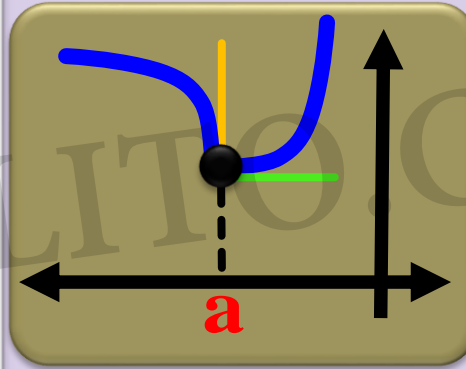
$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



شیب نیم‌ماس راست با فولیتو، فولی تو

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

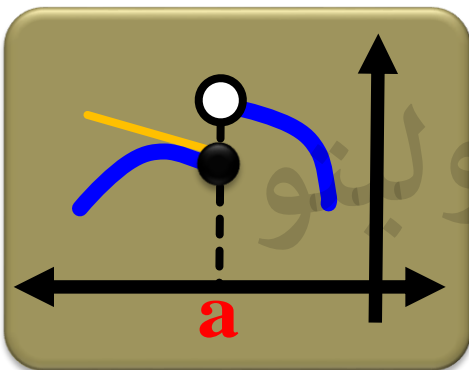
$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



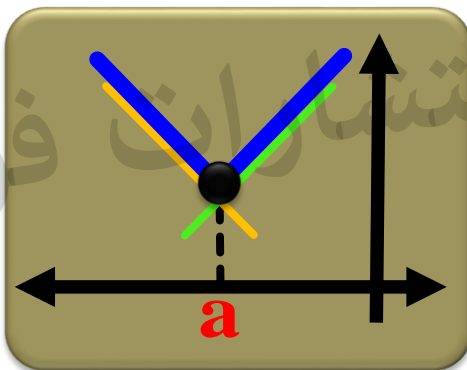
زمانی یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر است که بتوان

شرط مشتق پذیری f در $x=a$

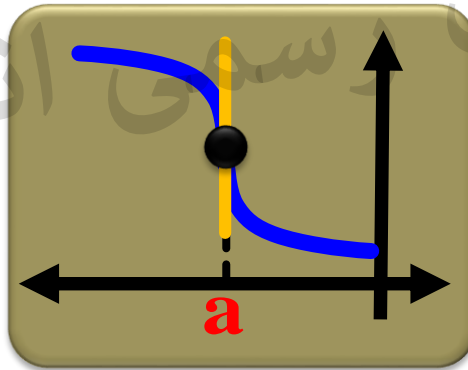
در آن نقطه بر نمودارش یک خط مماس غیر قائم رسم کرد (مماس ی تیکه)



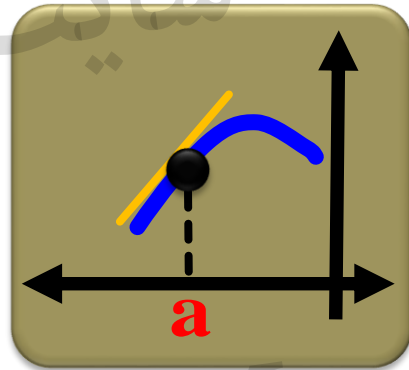
مشکل؟



مشکل؟



مشکل؟



Ok:)

پس شرط مشتق پذیری f در a می شود:

باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

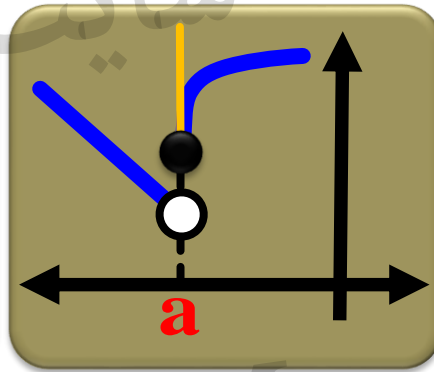
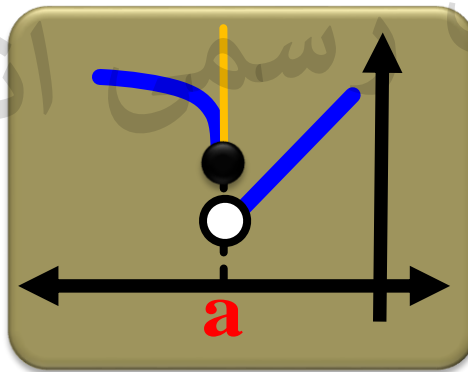
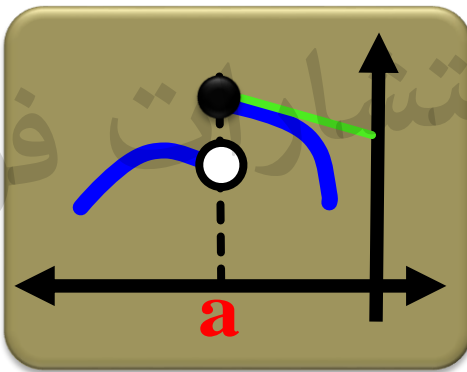
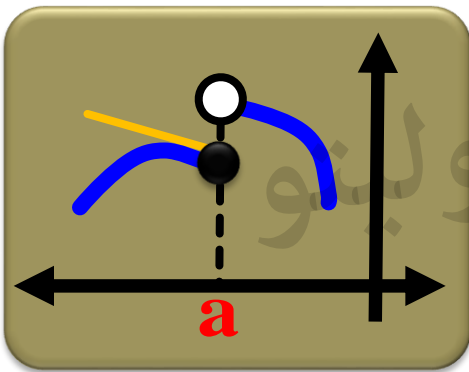
۲

باید تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۱

شرط لازم برای وجود مشتق، راست/چپ (شیب نیم مماس، راست/چپ) این است که تابع

در آن نقطه از راست/چپ پیوسته باشد.



کلا هواست باشه از نقطه توغالی نه میشه مماس رسم کرد، نه نیم مماس!

یکی از مهم ترین کانندهای مشتق ناپذیری، نقاط مرزی در توابع چندضابطه‌ای هستند.

با فولیتو، فولی تو (مثال کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

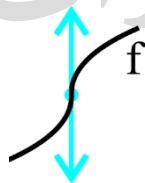
WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو مثال؛ (مثال کتاب) مشتق پذیری توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ را در صفر بررسی کنید.

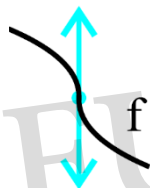
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

اگر f در $x = a$ پیوسته باشد و $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند، f در a مشتق پذیر نیست، اما خط مماس در این نقطه موجود است، که به آن مماس قائم می‌گویند.



$$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty \quad (\text{مثبت شد چون صعودی است})$$



$$f'_-(a) = f'_+(a) = -\infty \quad (\text{منفی شد چون نزولی است})$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

برابر است با $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ مشروط بر آن که این حد موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که f' برای آن‌ها موجود باشد را $D_{f'}$ می‌گوییم.

مثال (مثال کتاب) اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. سپس $f'(3)$ را بیابید.

WWW.FULLITO.COM

پند فرمول مشتق‌گیری مشتق بینیم صفا کنیم!

مشتق‌گیری! (صفر تا صد)

۱ $y = a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y' = 0$

۲ $y = a x \rightarrow y' = a$

۳ $y = a \Delta^n \rightarrow y' = a n (\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$

رمز

• نما در ضرب ضرب همیشه!
• یکی از نما کم همیشه!
• در مشتق پایه ضرب همیشه!

ex $y = \frac{-2}{x^4}$

ex $y = \frac{1}{5} (-5x)^{12}$

۴ $y = f \pm g \pm \dots \rightarrow y' = f' \pm g' \pm \dots$

۵ $y = f \cdot g \rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y = \frac{6}{x^3} - x^2 \sqrt[3]{x} + 4x$

۶

$$y = \sqrt{\Delta}$$



$$y' = \frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$$

۷

$$y = \frac{f}{g}$$



$$y' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

ex

$$y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^3}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

T تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+a}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2+ax+b & x < 2 \end{cases}$ روی R مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

$$-\frac{3}{2}(4)$$

$$-\frac{11}{2}(3)$$

$$\frac{3}{2}(2)$$

$$\frac{11}{2}(1) \checkmark$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

بفوانید : مشتقِ داخلش در اِف پریم داخلش! تمام :

$$y = f(\Delta) \longrightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$$

اگر T $f(x) = \frac{x^2 - 2}{1 + x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$, حاصل $f'(g(x)) \times g'(x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۲)

$$\frac{x-3}{x^3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3x} \quad (3)$$

$$\frac{2}{x^2} \quad (2)$$

$$\frac{2}{x} \quad (1)$$

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو
مثال: اگر $f(x) = \sqrt{-2x}$ و $g(x) = (2x+1)^2$ ، آنگاه مشتق تابع $g \circ f(x)$ در $x = -2$ را با استفاده از قاعده زنجیری به دست بیاورید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$g(x) = \left(\frac{-3x - 1}{x^2 + 5} \right)^8$$

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو

شروط مشتق پذیری روی بازه

<p>۱ f در تمامی نقطه‌های موجود در بازه‌ی (a, b) پیوسته است.</p> <p>۲ f در تک‌تک نقطه‌های این بازه هم، مشتق پذیر است.</p> <p>این جوری هم ببین: تابع f در بازه‌ی (a, b) هیچ نقطه‌ی ناپیوسته و مشتق ناپذیری ندارد...!</p>	مشتق پذیری f روی (a, b)
<p>۱ f در (a, b) مشتق پذیر است.</p> <p>۲ f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!)</p>	مشتق پذیری f روی $[a, b)$
<p>۱ f در (a, b) مشتق پذیر است.</p> <p>۲ f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته لازم است که پیوستگی چپ هم داشته باشد...!)</p>	مشتق پذیری f روی $(a, b]$
<p>۱ f در (a, b) مشتق پذیر است.</p> <p>۲ f در $x = a$ مشتق راست دارد (و البته پیوستگی راست!)</p> <p>۳ f در $x = b$ مشتق چپ دارد (و البته پیوستگی چپ!)</p>	مشتق پذیری f روی $[a, b]$

با فولیتو، فولی تو (مثال: مثل کتاب) نمودار $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری آن را روی بازه‌های $[-2, 1]$ ، $(1, +\infty)$ و $[1, 2]$ بررسی کنید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

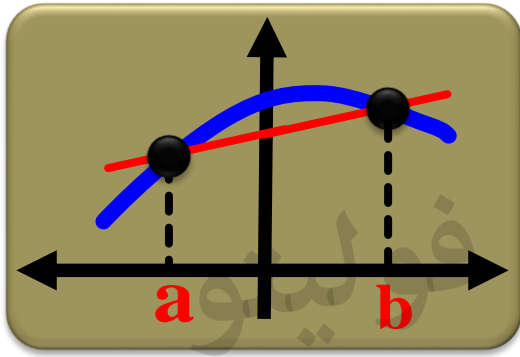
اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به صورت $y'' = f''(x)$ (خوانده شود ایگرگ زگوند) می نویسیم و برای مناسبه آن از تابع y' مشتق می گیریم.
 مثال: (مثال کتاب) اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ ، آنگاه تابع y' و y'' را بیابید.

WWW.FULLITO.COM

آهنگ تغییر متوسط

واصل نقاط سروته بازه است!

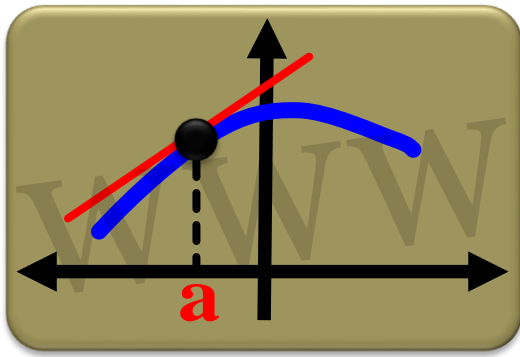
آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ همان شیب خط



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x = a$ همان شیب خط مماس بر نمودارش در a است.



$$f'(a)$$

یا فولیتو، فولیتو (مثال کتاب) تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را x ماه پس از تولد، بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{month}}$

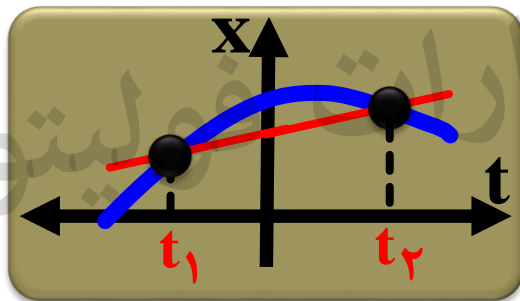
مشخص می‌کند. آهنگ متوسط رشد یک کودک را از ۱ ماهگی تا ۳۶ ماهگی بیابید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

میدانیم (ایشالا!) که سرعت متوسط می شود نسبت جابجایی به زمان.

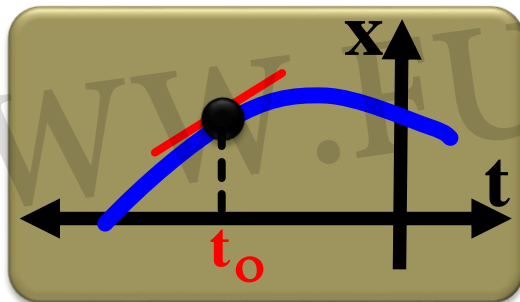
پس در اینجا با تابع $(y = x(t))$ و نمودار مکان بر حسب زمان سروکار داریم!



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

باید بدانید که تابع سرعت، مشتق تابع مکان-زمان است!

سرعت لحظه‌ای



$$v(t_0) = x'(t_0)$$

با فولیتو، فولی تو www.fullito.com سایت رسمی انتشارات فولیتو

با فولیتو مثال فولی کتاب با تغییر) رابطه $h(t) = -5t^2 + 40t$ ، ارتفاع جسم $h(t)$ را t ثانیه پس از پرتاب از سطح زمین نشان می‌دهد.

الف) سرعت متوسط جسم در بازه زمانی $[0, 2]$ را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای جسم در لحظه $t = 2$ مقدار است؟

ج) جسم چند ثانیه پس از پرتاب، به نقطه اوج می‌رسد؟

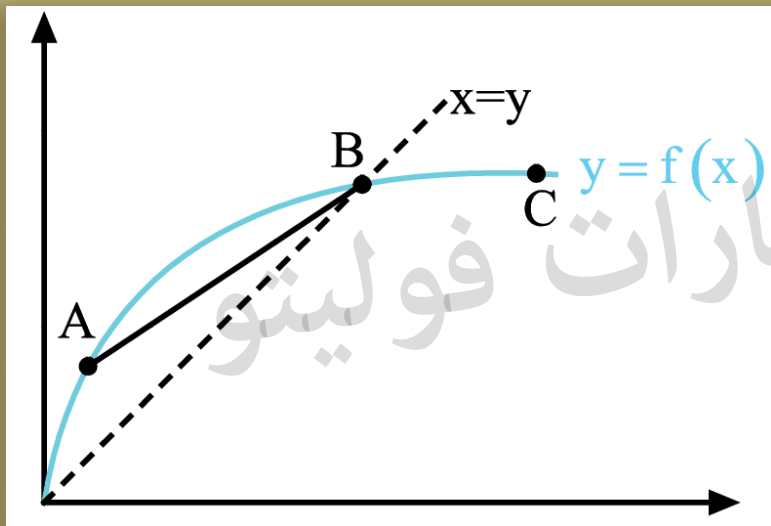
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (مهرین کتاب) نگار $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM



الف) شیب نمودار در نقطه A $\leftarrow m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه B $\leftarrow m_2$

پ) شیب نمودار در نقطه C $\leftarrow m_3$

ت) شیب خط AB $\leftarrow m_4$

ث) شیب خط $\leftarrow m_5$

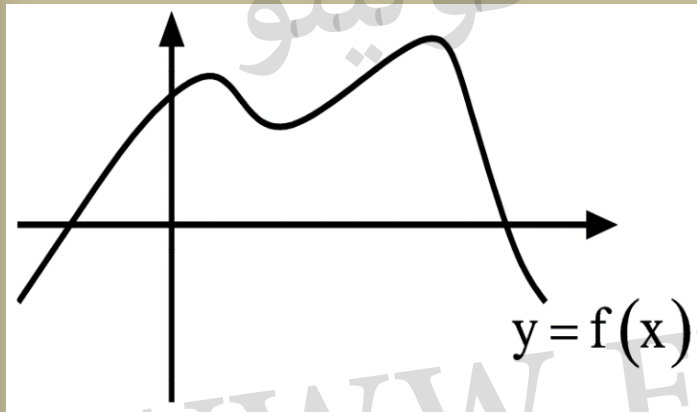
ج) شیب خط $\leftarrow m_6$

(تمرین کتاب) نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y = f(x)$ مشخص کنید به طوری که:

الف) A نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن با صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

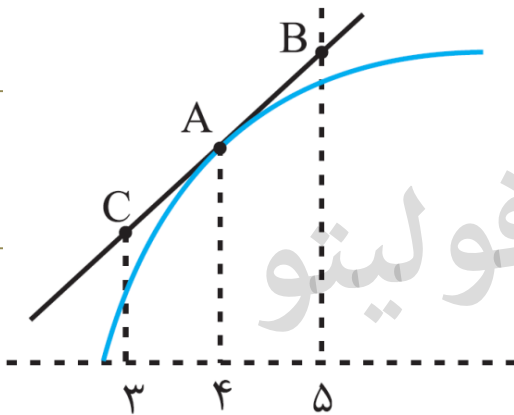


ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن با صفر است.

ث) نقاط E و F، نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن با مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

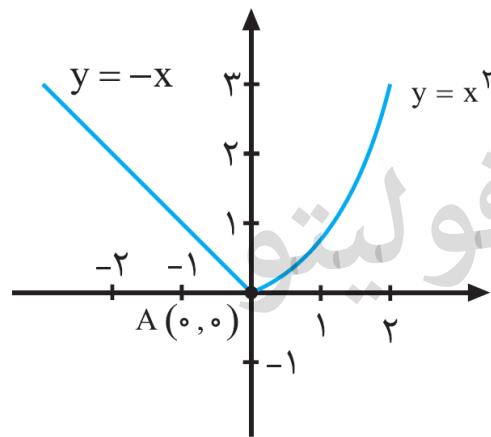
www.fullito.com با فولیتو، فولی تو (مترین کتاب) برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل، مفصلات نقاط A و B و C را بیابید.



سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) با مناسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع داده شده در نقطه **A**، نشان دهید که این تابع در نقطه **A** مشتق پذیر نیستند.



سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (مدرین کتب) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

- الف) در یک نقطه برابر صفر شود. ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.
ت) در تمام نقاط یکسان باشد. ث) در تمام نقاط منفی باشد.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$f(x) = |x^2 - 4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاطی به طول های ۲ و ۴

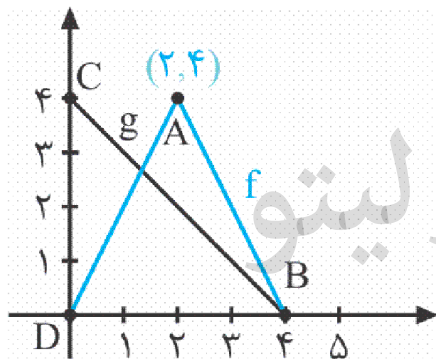
سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ و $h'(2)$ ، $h'(3)$.



سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$$

WWW.FULLITO.COM

داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی (کتاب) گنبدایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم

مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید؛

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0, 1]$ مقدار است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می شود؟

WWW.FULLITO.COM

مشتق توابع مثلثاتی (مخصوص رشته ریاضی)

$$۱- (\sin \Delta)' = \Delta' \cos \Delta$$

$$۲- (\cos \Delta)' = -\Delta' \sin \Delta$$

$$۳- (\tan \Delta)' = \Delta' (1 + \tan^2 \Delta)$$

نکته: در کتاب درسی معرفی از مشتق تابع \cot زده نشده! ما هم کاری بهوش نداریم! فقط آگه

تو امتحان \cot دیدی نترس! به باش بنویس $\frac{1}{\tan}$ و بعد محاسبات مشتق رو انجام بده!

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x$$

$$g(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$h(x) = \cos^3 x$$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$f(x) = \tan^2(x) - 2\cos(x)$$

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$f(x) = \sin x \cos 2x$$

WWW.FULLITO.COM

ریاضیت با من

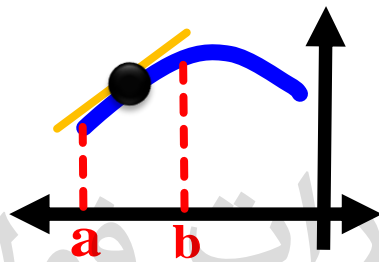


فصل ۵ :

کاربرد مشتق

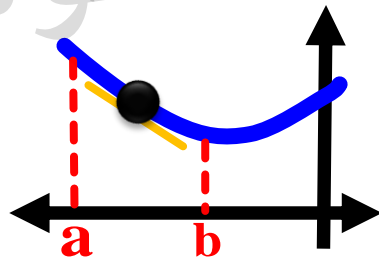
آزمون یکنوایی توابع

با فولیتو، فولی تو



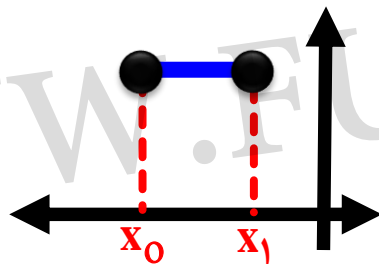
اگر در یک بازه تابع f صعودی آکید باشد،
در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$$f' > 0$$



اگر در یک بازه تابع f نزولی آکید باشد،
در آن بازه علامت مشتق منفی است.

$$f' < 0$$



اگر در یک بازه تابع مشتق موجود و صفر
باشد، در آن بازه تابع f ثابت است.

$$f' = 0$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

نقطه‌ی $c \in D_f$ ، نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم اگر یا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

توجه اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی به حساب می‌آیند.

بدست آوردن نقاط بحرانی از ضابطه

$$\xrightarrow{\text{مشتق بگیر!}} f'(x) = \frac{A}{B} \begin{array}{l} \xrightarrow{A=0} \text{اگر نقطه درونی دامنه} \\ \xrightarrow{B=0} \text{باشند، بحرانی هستند} \end{array}$$



تابع با ضابطه $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ در $[-1, 1]$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۲(۱)

۳(۲)

۴(۳)

۵(۴)

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

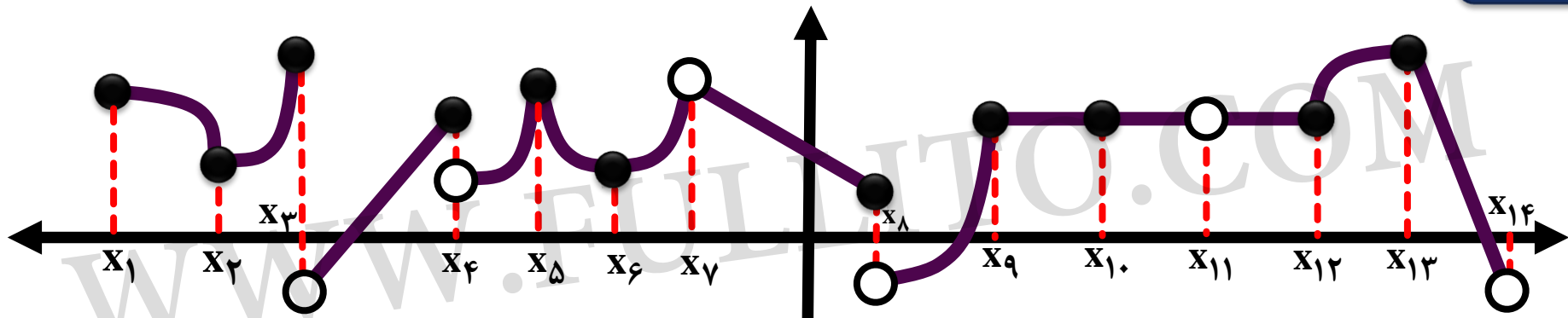
به ماکزیمم یا مینیمم می‌گویند اکسترمم!

نقاط اکسترمم (نسبی) و مفومش

مینیمم (ماکزیمم) نسبی نقطه‌ی $x=c \in D_f$ را مینیمم (ماکزیمم) نسبی برای تابع f می‌گوییم.

هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض نقاط همسایگی آن باشد!

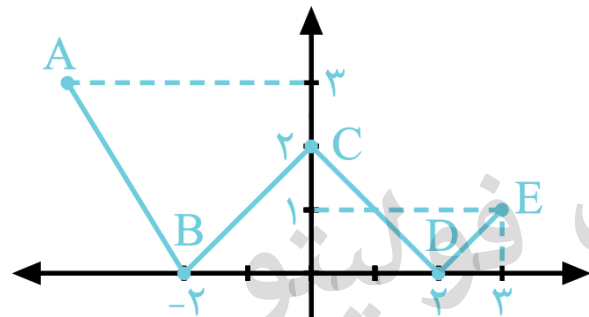
توجه شرط لازم اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، وجود همسایگی (راست و چپ) اطراف آن است.



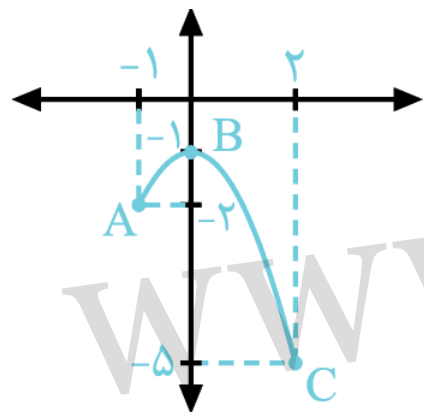
قضیه فرما: اگر تابع f در نقطه‌ای به طول C اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$ است.

مثال: با فولیتو، فولی تو (در کلاس) برای نقاط مشخص شده در هر یک از توابع زیر، نوع اکسترمم نسبی، مقدار اکسترمم نسبی و مقدار مشتق را

در آن نقطه مناسبه کنید.



الف) $f(x) = ||x| - 2|; x \in [-5, 3]$



ب) $g(x) = -x^2 - 1; x \in [-1, 2]$

تابع مشتق را بدست آورده و تعیین علامت می‌کنیم! علامت مشتق در هر بازه،

نوع یکنوایی تابع را مشخص می‌کند! با تعیین جهت یکنوایی در جدول، نقاط اکسترمم نسبی مشخص می‌شوند!

مثال: با استفاده از آزمون مشتق اول، نقاط اکسترمم نسبی و مقادیر آنها را برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$ بیابید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

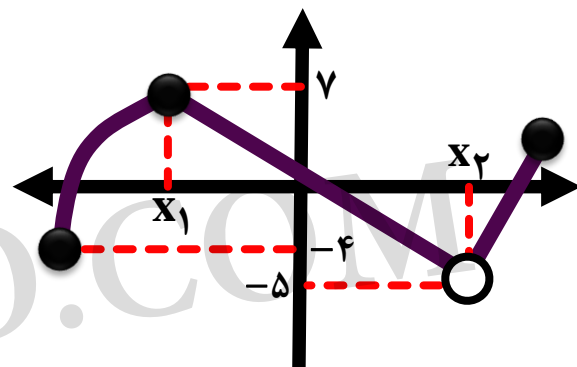
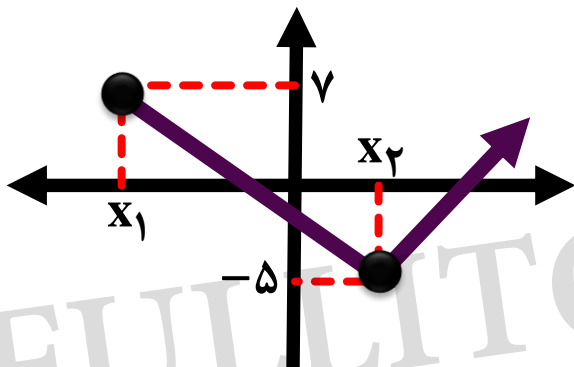
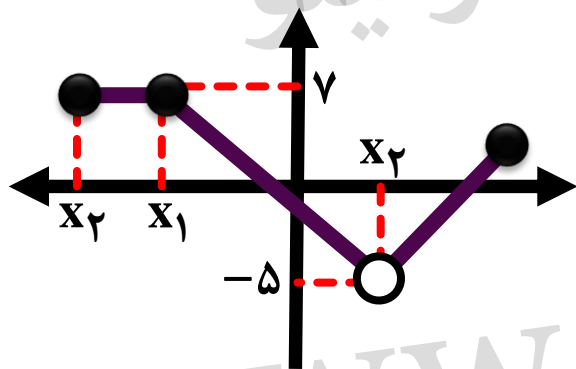
مینیمم (ماکزیمم) مطلق

نقطه‌ی $x=c \in D_f$ ، مینیمم (ماکزیمم) مطلق برای تابع f می‌گوییم.

هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض تمام نقاط دامنه‌اش باشد

توجه

برای اکسترمم مطلق شدن، وجود همسایگی اهمیتی ندارد، چون عرضش با کل نقاط مقایسه می‌شود!



توجه

هر اکسترمم مطلق می‌تواند نسبی هم باشد (چه زمانی؟) و هر اکسترمم نسبی می‌تواند مطلق هم باشد (چه زمانی؟)

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

گام اول: مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

گام دوم: مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

گام سوم: در گام دوم، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار \max مطلق و کوچک‌ترین آن‌ها، \min مطلق.

(مثال کتاب) نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 3]$ تعیین کنید.

WWW.FULLITO.COM

تشخیص نقاط بحرانی در نمودار

رسم یک خط مماس، همه چیز را مشخص می کند!

در هر کدام از سه حالت زیر در نمودارها، نقطه بحرانی داریم و لاغیرا ببینید :

- ۱

خط مماس افقی باشد

مشتق موجود و صفر!

۲

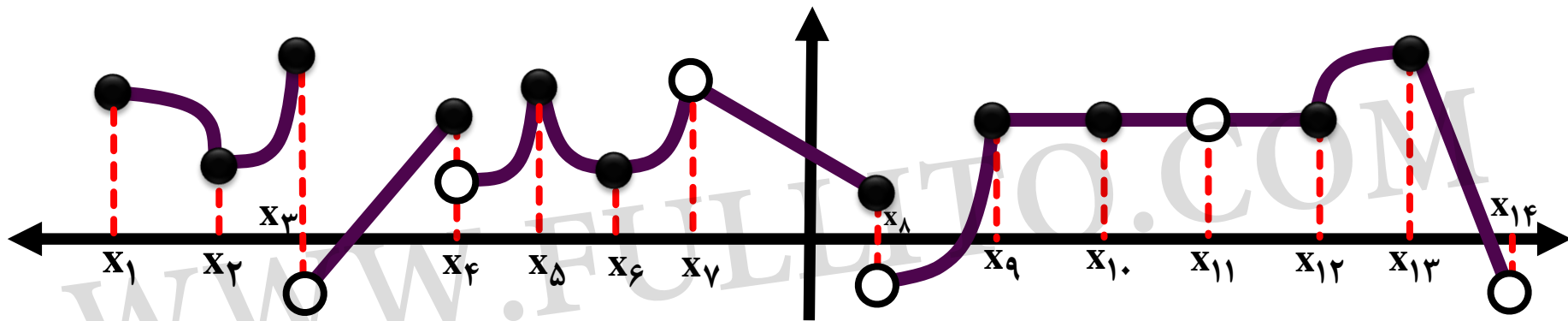
خط مماس قائم باشد

مشتق ناموجود است!

۳

خط مماس قابل رسم نباشد

مشتق ناموجود است!



توجه هر اکسترممی بحرانی است، اما هر بحرانی ای اکسترمم نیست!

یعنی پیدا کردن بهترین حالت، مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود
مسامت یا مهم! مسائل بهینه‌سازی معمولا با **بیان فارسی** و **کلمات کمترین یا بیشترین** همراهند!

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **نقتم**!!

۱ **ن :** نمادگذاری، رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوم‌ها و نمادهای مجهولات $\leftarrow X$ و Y

۲ **ف :** f ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ **ت :** تک‌متغیرش کن! آله اف دو متغیره بود، تک‌متغیرش کن! (با استفاده از یه رابطه از دل سوال!)

۴ **م :** $\max-\min$ عرض اکسترمم (عالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو بدست بیار!

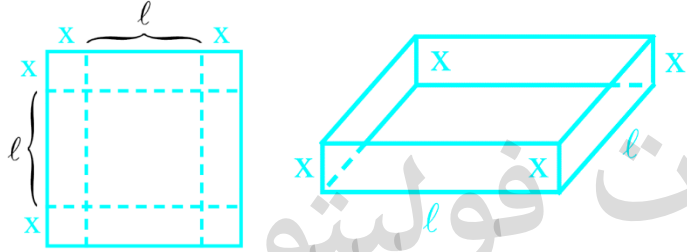
با فولیتو (مثال فولیتو) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن با هم برابر باشند.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

www.fullito.com با فولیتو (مثال فولیتو) مطابق شکل، ورقه فلزی به طول ۳۰cm، ۱ در نظر بگیرید. می‌خواهیم از ۴ گوشه آن مربع‌هایی کوچک با ضلع

X، را برداشته و سپس با تا کردن ورق در امتداد فاصله‌ها، جعبه‌ای در باز بسازیم. مقدار X چقدر باشد تا حجم قوطی حداکثر شود؟



سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها
www.fullito.com

نزولی اکید است؟

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$h(x) = \sqrt[3]{x}$$

نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \quad ; \quad x \in [-1, 2]$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲ فواید بود. www.fullito.com قطع این کتاب، لازم است هاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ و هاشیه‌های کناری هر کد ۴ یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

مجموع اضلاع قائمه مثلث قائم الزاویه ای ۸ است. کمترین مقدار وتر آن چقدر است؟

$$\sqrt{2} (4)$$

$$3\sqrt{2} (3)$$

$$4\sqrt{2} (2)$$

$$2\sqrt{2} (1)$$

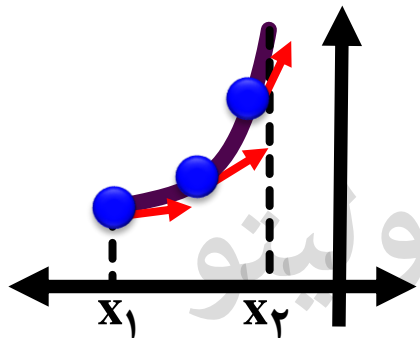
A

سایت رسمی انتشارات فولیتو

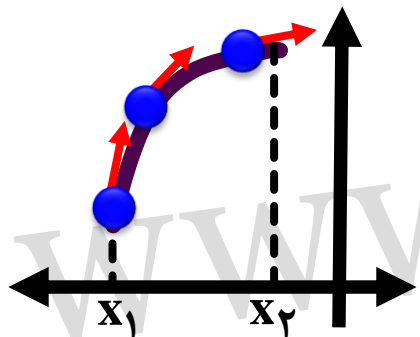
WWW.FULLITO.COM

اگر بفوایم پی ببریم که جهت تقعر تابع f در چه بازه‌ای رو به بالا یا رو به پایین است

کافیست f'' را تعیین علامت کنید!

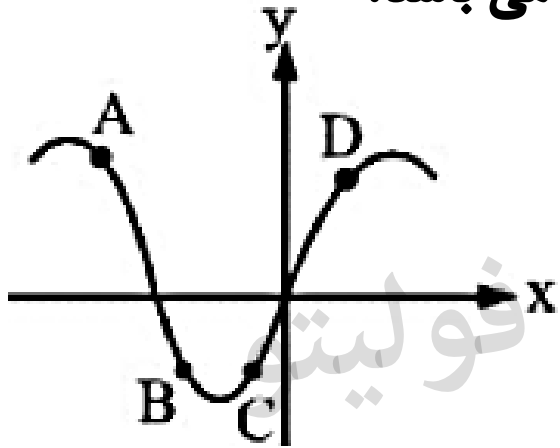


۱ در فواصلی که $f'' > 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.



۲ در فواصلی که $f'' < 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.

در کدام نقطه از نمودار شکل زیر، مقادیر f' , f'' هر دو مثبت می باشد؟



D(۴

C(۳

B(۲

A(۱

WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

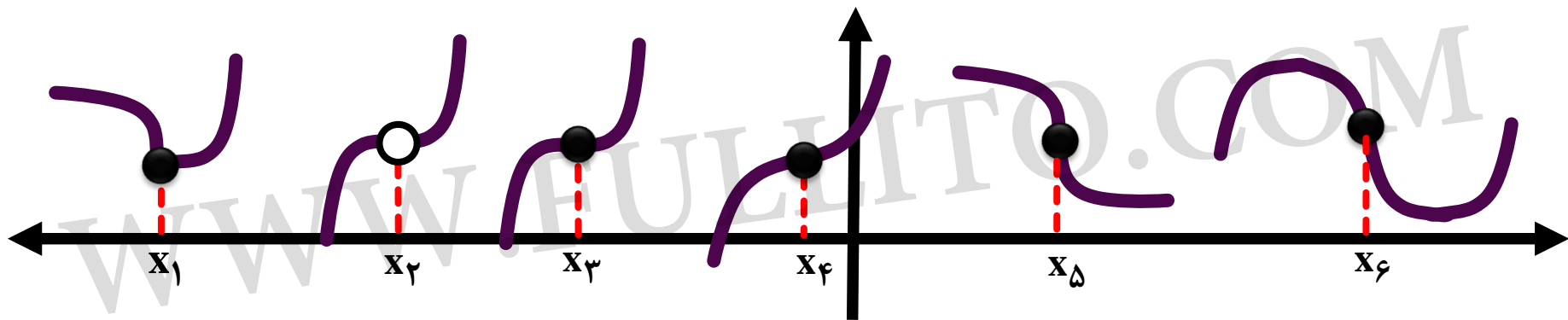
WWW.FULLITO.COM

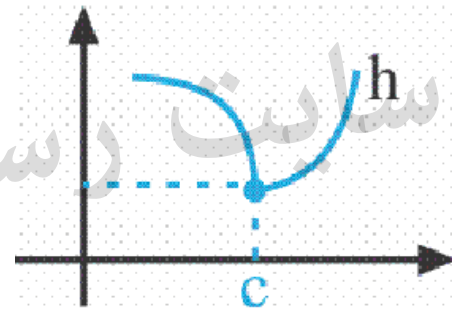
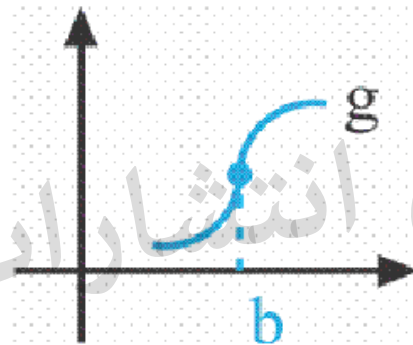
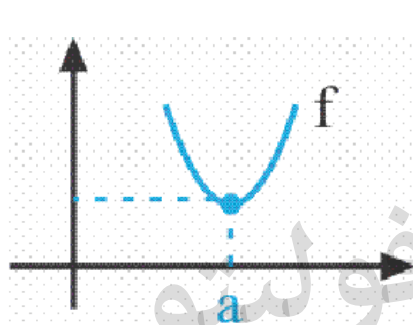
نقطه‌ای از دامنه تابع که جهت تقعر در آن عوض می‌شود. هر نقطه‌ای که جهت تقعر

در آن عوض می‌شود! دقت کنید هر جا تقعر عوض شد عطف نیست! برای عطف شدن ^۳ شرط لازمه!

- ۱ عضو دامنه تابع باشد!
- ۲ خط مماس در آنجا موجود باشد
- ۳ جهت تقعر در آن عوض شود

۳ مدل نقطه عطف داریم! عطف افقی، عطف قائم و عطف مایل!





WWW.FULLITO.COM

$$۱) y = x^3 - 2x^2 + x - 6$$

سایت رسمی انتشارات فولیتو

$$۲) y = \sqrt[3]{x-1}$$

WWW.FULLITO.COM

- ۱- دامنه تابع را به دست می‌آوریم.
 - ۲- محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم. (در صورت وجود)
 - ۳- f' را به دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن، بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.
 - ۴- نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی تابع را می‌یابیم. (در صورت وجود)
 - ۵- f'' را به دست آورده و با تعیین علامت آن، جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.
 - ۶- نقطه عطف را می‌یابیم. (در صورت وجود)
 - ۷- بررسی رفتار تابع در بی‌نهایت (در صورت وجود)
 - ۸- معادله مماس‌های تابع را به دست می‌آوریم. (در صورت وجود)
 - ۹- در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.
- حالا جدول رفتار تابع (متشکل از f و f' و f'') را تشکیل داده و بعد نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = (x-1)^2(x+3)$$

WWW.FULLITO.COM

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که $c \neq 0$ ، را یک تابع هموگرافیک می‌گوییم. این تابع دارای یک مجانب قائم

به معادله $x = -\frac{d}{c}$ (ریشه مخرج) و یک مجانب افقی به معادله $y = \frac{a}{c}$ (نسبت ضرایب x ها) است. شکل

کلی آن به دو صورت (شافک‌ها صعودی) یا (شافک‌ها نزولی) است.



نکته: شرط $c \neq 0$ فیللی مهمه‌ها! چون آگه $c = 0$ باشه، یک تابع خطی به معادله $y = \frac{ax+b}{d}$ داریم که دیگه تابع هموگرافیک نیست! یک فطه.

نکته: در شرایطی که $c \neq 0$ و $ad = bc$ ، این تابع به یک تابع ثابت به معادله $y = \frac{a}{c}$ که $x \neq -\frac{d}{c}$ تبدیل میشود.

مثال ۱: با فولیتو، فولیتو (مثال کتاب) جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{3x+4}{-2x+1}$ را رسم کنید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که در نقطه ای مانند a بهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطه ی عطف نباشد.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

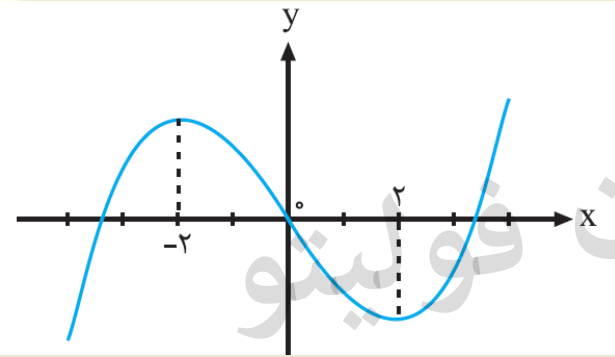
WWW.FULLITO.COM

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

www.fullito.com با فولیتو، کتفولی لگو (۰,۰) نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطه $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a, b, c را بیابید.



سایت رسمی انتشارات فولیتو

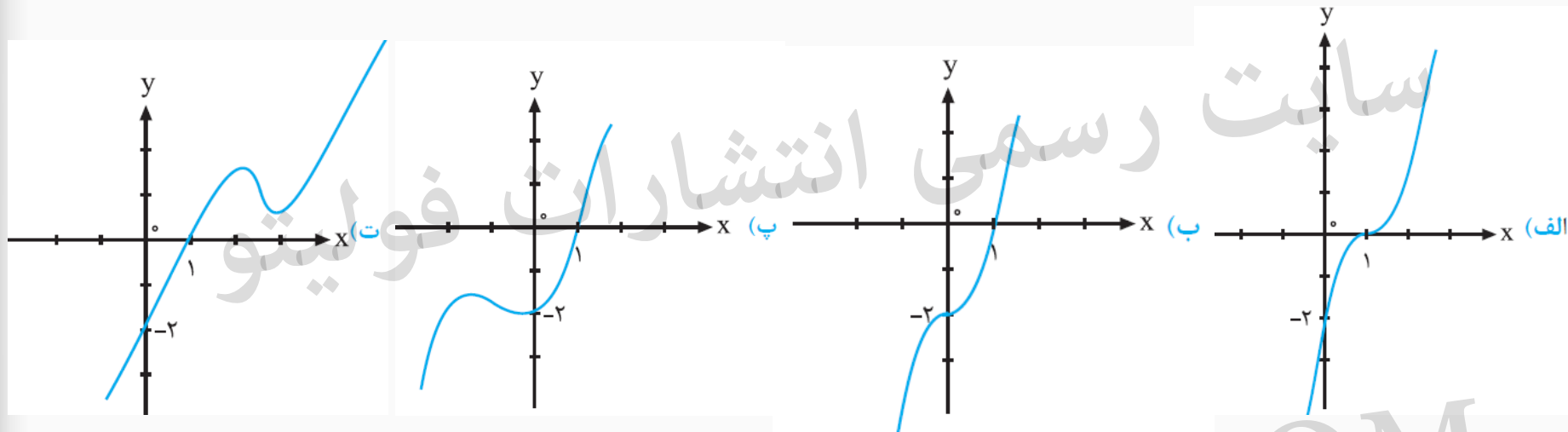
WWW.FULLITO.COM

با فولیتو (فولی تو) خوش کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ و محل تقاطع میانب‌های آن نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از www.fullito.com نقطه‌ی $(0, -1)$ بگذرد، ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.

سایت رسمی انتشارات فولیتو

WWW.FULLITO.COM

با فولیتو، فولی تو (تمرین کتاب) کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به $f(x) = x^3 + x - 2$ است؟



WWW.FULLITO.COM

ریاضیت با من