

استاد بهنام سرهنگی
مدرس ریاضی فولیتو

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

بافولیتو فولی تو

ریاضی دهم





مجموعه اعداد

۱ اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ۲ اعداد حسابی $W = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

۳ اعداد صحیح $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ۴ اعداد گویا $Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq 0\}$

۵ اعداد کنگ $Q' = \{x | x \notin Q\}$ اعداد رادیکالی که سازه نمیشوند یا اعداد اعشاری بدون دوره گردش

۶ اعداد حقیقی $R = Q' \cup Q$ **توجه** $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

توجه مجموعه اعداد کنگ فقط با مجموعه اعداد حقیقی اشتراک دارد $Q' \cap R = Q'$

بازه و نمایش آن

نمایش هندسی

نمایش مجموعه‌ای

بسته $\{x \in R | -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$

باز $\{x \in R | x < 2\} = (-\infty, 2)$

نیم باز $\{x \in R | 1 \leq x < 4\} = [1, 4)$

$\{x \in R | -3 < x \leq 0\} = (-3, 0]$

EX

$(-1, 5] \cup [-3, 4) = [-3, 5]$

EX

$(-\infty, 5] \cap (0, 6) = (0, 5]$

EX

$(-3, 4) - [-1, +\infty) = (-3, -1)$

مجموعه متناهی: مجموعه‌ای است که تعداد اعضایش قابل شمارش (عدد حسابی) است. (ته داره)

مجموعه نامتناهی: مجموعه‌ای است که تعداد اعضایش غیرقابل شمارش است. (ته نداره)

T از بین مجموعه‌های زیر، چندتا متناهی هستند؟

الف) مجموعه‌ی تمامی مدارس شهر تهران

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج چهار رقمی

پ) مجموعه‌ی تمامی اعداد گویایی که صورتشان ۳ است.

ت) مجموعه‌ی تمامی درخت‌های آسیا

ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مربع آنها حداقل ۳ رقمی است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

مجموعه مرجع در هر سوال یک مجموعه را به عنوان مرجع می‌دهند و با U نشان می‌دهند. تمام اعضا از U انتخاب می‌شوند هر عضوی که از U نباشد را انگار نمی‌شناسیم (اول Universal)

متمم مجموعه A مجموعه‌ای است که اعضایش در U هستند و در A نیستند. $U - A = A'$ $U - A' = A$

توجه اگر مرجع را ندهند، اعداد حقیقی را مرجع در نظر می‌گیریم مثلاً در بازه‌ها مرجع R است.

توجه بهترین روش برای درست آوردن متمم یک بازه، استفاده از محور است.

عملیات جبری مجموعه‌ها در حضور متمم

قانون دومگان $1 (A')' = A$ $2 (A \cup B)' = A' \cap B'$ & $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$3 A \cup A' = U$ & $A \cap A' = \emptyset$ $4 U' = \emptyset$ & $\emptyset' = U$

$5 A - A' = A$ & $A' - A = A'$

$6 \text{ if } A \subseteq B \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \\ B' \subseteq A' \\ A - B = \emptyset \end{cases}$

مجموعه‌های جدا از هم $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A$ و B جدا از هم هستند

توجه تکی با هر مجموعه‌ای رتوانه جدا از هم‌اند، & هر مجموعه با متممش جدا از هم‌اند.

T اگر مجموعه‌ی مرجع را Q بگیریم، کدام یک از مجموعه‌های زیر حتماً با مجموعه‌ی دلخواه B ، جدا از هم هستند؟

$1) A = \{x | x^2 = 2\}$ $2) A = \{x | x^2 + 3x - 4 = 0\}$ $3) A = \{x | x^2 = 4\}$ $4) A = \{5\}$

کلمات کلیدی و تعداد اعضایش فرض کن دو مجموعه A و B تحت شرایط زیر رخ دهند

هر دو پاهم (=و) $A \cap B \Rightarrow n(A \cap B)$ **تعداد اعضا**

حداقل یکی (=یا) $A \cup B \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ **تعداد اعضا**

فقط A $A - B = A \cap B' \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ **تعداد اعضا**

فقط یکی $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow n(A \cup B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$ **تعداد اعضا**

هیچکدام $(A \cup B)' = A' \cap B' \Rightarrow n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$ **تعداد اعضا**

حداکثر یکی $(A \cap B)' = A' \cup B' \Rightarrow n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$ **تعداد اعضا**

نرخ بیکاری

پیرایه است با نسبت تعداد افراد بیکار در یک جامعه، به تعداد کل افراد آن جامعه. اگر مجموعه U اعضای جامعه A افراد شاغل و A' افراد بیکار جامعه باشند، داریم:

$$\frac{n(A')}{n(U)} \leq 1$$

مثال، در یک جامعه آماری، مجموعه افراد شاغل ۶۳ عضو بیشتر از مجموعه افراد بیکار دارد. اگر این جامعه به طور کلی ۹۴ عضو تشکیل شده باشد، نرخ بیکاری این جامعه چند درصد است؟

answer

مثال: کلاس کتاب در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال، ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال می‌باشند و ۵ نفر عضو هیچکدام نیستند. چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم می‌باشند؟

answer

دنباله رشته‌ای از اعداد کنار هم را یک دنباله می‌گوییم.

t_1, t_2, t_3, \dots

جمله عمومی جمله‌ی عمومی یک دنباله (مثلاً t_n) رشت کلی دنباله را نشان می‌دهد.

ex if $a_n = \frac{n^2}{n+1} \Rightarrow a_7 + a_9 = ?$

ex $a_{3n-1} = \frac{\sqrt{n}}{n-2} \Rightarrow a_5 \& a_{11} = ?$

دنباله خطی دنباله‌ای است با جمله عمومی درجه ۱ بر حسب n $t_n = an + b$

T در یک دنباله خطی، جمله سوم برابر ۲۹ و جمله نهم ۹۵ است. جمله دوم این دنباله کدام است؟

۷(۱) ۱۸(۲) ۲۹(۳) ۱۵(۴)

A

دنباله درجه دو دنباله‌ای است با جمله عمومی درجه ۲ بر حسب n $t_n = an^2 + bn + c$

T در دنباله درجه دوم ۵، ۸، ۱۳، ... جمله هشتم کدام است؟ ۸۲(۱) ۶۸(۲) ۴۶(۳) ۷۴(۴)

A

الگوی هندسی دنباله‌ها هر جمله یک دنباله را می‌توان با تعدادی نقطه یا خط هم نشان داد.

با نگاه به شکل و دقت به شماره‌اش، می‌توان الگوی برای دنباله و شکل‌های بعدی را حدس زد.

$a_1 = 2^2$ $a_2 = 3^2$... $a_n = (n+1)^2$

دنباله مربعی $t_n = n^2$

$t_1 = 1^2 = 1$ $t_2 = 2^2 = 4$ $t_3 = 3^2 = 9$

دنباله مثلثی $t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$t_1 = 1$ $t_2 = 1 + 2 = 3$ $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

مثال: اگر در کلاس، انگوی مقابل را در نظر بگیرید. جمله ششم آن را درست بنویسید. سپس جمله عمومی دنباله مربوط به این انگو را بنویسید. آیا دنباله حاصل قطعی است؟

answer

$a_1=1$ $a_2=3$ $a_3=6$

دنباله‌ی حسابی

$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 = a_1 + d \xrightarrow{+d} a_3 = a_1 + 2d \rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$

$d > 0 \rightarrow$ صعودی $1, 5, 9, 13, \dots$ $d < 0 \rightarrow$ نزولی $4, 1, -2, -5, \dots$ $d = 0 \rightarrow$ ثابت $4, 4, 4, \dots$

واسطه‌ی حسابی

$c \quad b \quad a \rightarrow b = \frac{a+c}{2}$ b واسطه حسابی
 عملیات کناری شده
 (۳امه متساوی الفاصله از یک دنباله حسابی)

۴۲

مثال: اگر در کلاس، بین اعداد ۱۸ و ۶۲ سه عدد پتان درج کنید که ۵ عدد حاصل تشکیل یک دنباله حسابی بدهند.

answer

$a_1=18$ a_2 a_3 a_4 $a_5=62$

دنباله‌ی هندسی

$a_1 \xrightarrow{\times q (q \neq 0)} a_2 = a_1 q \xrightarrow{\times q} a_3 = a_1 q^2 \rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$

$q > 1 \rightarrow$ صعودی $3, 9, 27, \dots$ $q = 1 \rightarrow$ ثابت $3, 3, 3, \dots$ $0 < q < 1 \rightarrow$ نزولی $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ $q < 0 \rightarrow$ غیرکنوا $1, -2, 4, \dots$

واسطه‌ی هندسی

$c \quad b \quad a \rightarrow b^2 = a.c$ b واسطه هندسی
 عملیات کناری شده
 (۳امه متساوی الفاصله از یک دنباله هندسی)

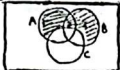
مثال: اگر $2x$ ، $2x+1$ و $2x-1$ به ترتیب ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت آن کدام است؟

answer

حل نمونه سوال بیشتر (کتاب + امتحانات گذشته)

بین دو عدد $\frac{1}{2}$ و ۲۵۶ هشت عدد نوشته‌ایم به طوری که ۱۰ جمله حاصل جملات متوالی یک دنباله هندسی‌اند قدر نسبت دنباله را بیابید. $(a_1 = \frac{1}{2})$ **امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲**

۵ (د) اگر A و B و C پیشامد از فضای نمونه S باشد شکل روبه رو کدام پیشامد را معلوم می کند؟



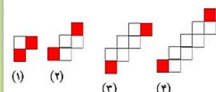
(۱) C رخ ندهد
(۲) A و B رخ دهد اما C رخ ندهد.
(۳) A و B و C همزمان رخ ندهند
(۴) A یا B رخ دهد اما C رخ ندهد.

امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲

گزینه مناسب را انتخاب کنید. **امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲**

حاصل $(2, 8) \cap (-\infty, 6)$ برابر است با:
الف) $(2, 6]$ ب) $(-\infty, 9)$ ج) $(2, 6)$ د) $(2, 6)$

مطابق الگوی زیر، چند مربع سفید در مرحله ی ۲۱ ام خواهیم داشت؟ **امتحانات تیزهوشان ۱۳۰۲**



(۱) (۲) (۳) (۴)

(تمرین کتاب) متاهی یا نامتاهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی
ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶
ت) $A = \{x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$
پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$
ث) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰

(تمرین کتاب) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متاهی باشد، آنگاه A متاهی خواهد بود یا نامتاهی؟


(تمرین کتاب) در یک نفرستنی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای، مشخص شد که ۷۰ نفر از آن ها در ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آن ها نیز اعلام کرده اند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته،

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند؟
ب) فقط از شرکت A خرید کرده اند؟
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند؟
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند؟

(تمرین کتاب) الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف) شکل بعدی را رسم کنید.

ب) جمله عمومی الگو را بنویسید.
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟



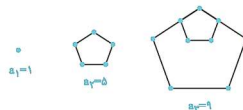
شکل ۱ شکل ۲ شکل ۳

(تمرین کتاب) در یک جمله دنیاه حسابی مجموع ۳ جمله اول ۳ و مجموع ۳ جمله پیری آن ۳۹ است. دنیاه را مشخص کنید.

answer

(تمرین کتاب) الف) جمله پیری الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنیاه را مشخص کنید.

answer



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله پنجم آن دنیاه ۳۹۷ است؟

(تمرین کتاب) علی دوپهره‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت آن هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل افت می‌کند.

الف) اگر پس از ۳ سال قصد فروش دوپهره‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوپهره پس از گذشت ۱۱ سال از چه رابطه‌ای پرست می‌آید؟

answer

(تمرین کتاب) عملیات سوم و ششم یک دنیاه هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنیاه را مشخص کنید.

answer

(امتحانات سال گذشته) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند که

$$n(A \cap B) = 75, \quad n(B) = 50, \quad n(A) = 70, \quad n(U) = 120$$

ج) $n(A \cap B')$

ب) $n(A' \cap B')$

الف) $n(A \cup B)$

answer

(امتحانات سال گذشته) پیرن دو عدد ۳ و ۱۶۱۳ چهار عدد طوری قرار دهید که دنیاه حسابی تشکیل شود.

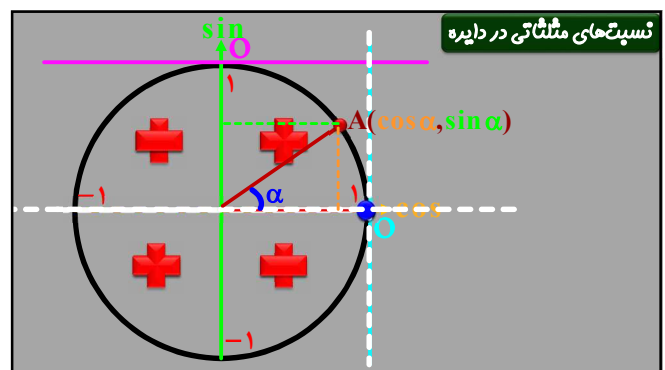
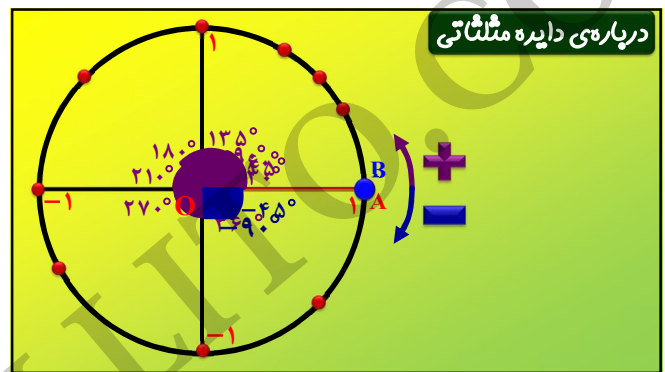
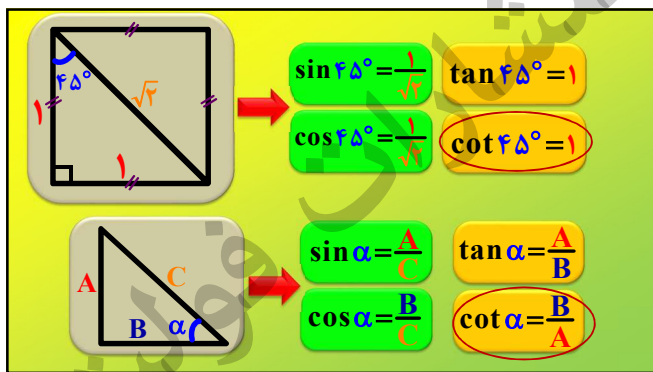
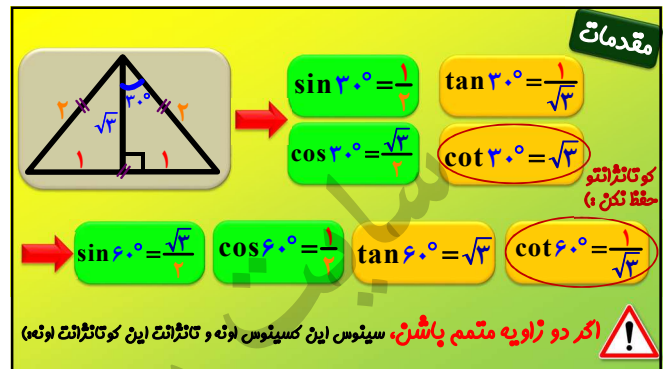
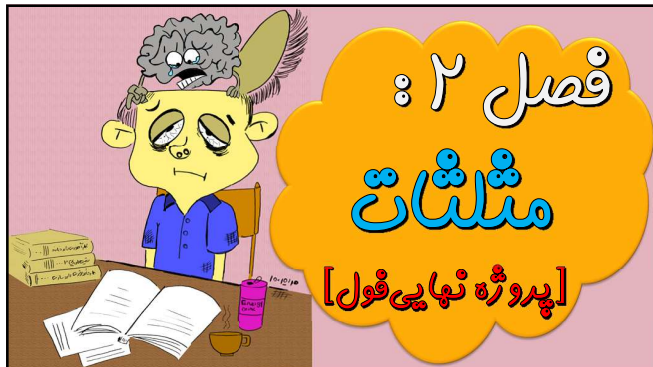
answer

(امتیازات سال گذشته) b_n و a_n دنباله‌های مقابل هستند. بیست و هفتمین جمله دنباله a_n

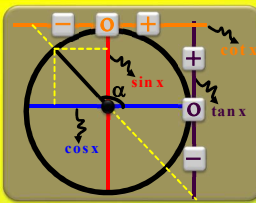
برابر k است. k و b_k را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_n = -5, -1, 3, \dots \\ b_n = 2\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots \end{cases}$$

answer



نسبت‌های مثلثاتی در دایره



$-1 \leq \sin x \leq 1$ $\tan x \in \mathbb{R}$
 $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\cot x \in \mathbb{R}$

برای مشخص کردن $\sin \alpha$ از انتهای کمان یک عمود بر محور y ها رسم کن!
 برای مشخص کردن $\cos \alpha$ از انتهای کمان یک عمود بر محور x ها رسم کن!
 برای مشخص کردن $\tan \alpha$ انتهای کمان را امتداد بده تا به محور تانژانت برخورد کن!
 برای مشخص کردن $\cot \alpha$ انتهای کمان را امتداد بده تا به محور کوتانژانت برخورد کن!

مثال، فعالیت کتب، هر یک از زوایای 135° ، 30° و 270° را روی یک دایره نشان دهید.

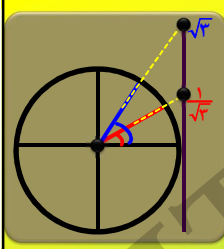
answer

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف

کمان	نسبت	$360^\circ / 0$ ($2\pi / 0$)	30° ($\frac{\pi}{6}$)	45° ($\frac{\pi}{4}$)	60° ($\frac{\pi}{3}$)	90° ($\frac{\pi}{2}$)	180° (π)	270° ($\frac{3\pi}{2}$)
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	0	0	
\cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	
\tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ت	0	ت	
\cot	ت	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ت	0	

⚠️ سینوس کوسینوس رو واسه هر زاویه حفظ کن! تانژانت و کوتانژانت رو از روشون حساب کن!

دیگه هیچوقت یادت نمیره!



تانژانت کوتانژانت 30° و 60° خیلی قاطی میشن! به راه سریع اینه که فقط تانژانت 30° و 60° رو حفظ کنی! کوتانژانتو درست ازش بیاری... اما حفظ کردن تانژانتا میدونیم تابع تانژانت تو ربع اول اکثراً صغیرها پس مقدار کوچیکه واسه زاویه کوچیکترس!

$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

علامت نسبت‌ها در ربع‌های دایره



ربع اول: $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\tan x > 0$, $\cot x > 0$
ربع دوم: $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$
ربع سوم: $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x > 0$
ربع چهارم: $\sin x < 0$, $\cos x > 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$

رمز: بار هسته اتم مثبت! **هسته**

همه سینوس تانژانت کوسینوس

مثال، اگر $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ و $\tan^2 \alpha \times \sin \alpha > 0$ ، انتهای α در کدام ربع دایره مثلثاتی می‌باشد؟

answer

۱ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **فرمولای مقدماتی مثلثات**

EX) if $\sin \alpha = \frac{-1}{4} \rightarrow \cos \alpha = ?$ ($-\frac{10}{4}\pi < \alpha < \frac{5}{4}\pi$)

۲ $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ **۳** $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

فرمولای
نقره‌ای

۴ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۵ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

مثال: (مثال کتاب درسی) درستی انکار مثلثاتی $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$ را بررسی کنید.

answer

مثال: (آلبر در کلاس) درستی هر یک از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ (ب) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ (الف)

مثلثات و هندسه **تائزات و شیب خط**

$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha$

توجه اگر زاویه خط با جهت منفی محور ایس‌ها را دارند، شیب خط می‌شود:

$m_1 = \tan \alpha = -\tan \beta$

T معادله خطی که از نقطه $(2, 3)$ عبور کرده و با جهت منفی محور طول‌ها زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌سازد به کدام صورت است؟ (۱) $\sqrt{3}y = 2(x + \sqrt{3} - 2)$ (۲) $\sqrt{3}y = 2(x - \sqrt{3} + 2)$ (۳) $\sqrt{3}y = -2(x + \sqrt{3} - 2)$ (۴) $\sqrt{3}y = -2(x - \sqrt{3} + 2)$

A

یادآوری نوشتن معادله خط

با شیب خط و یک نقطه از خط:

$m, A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$

با دو نقطه از خط:

$A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right., B \left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right. \rightarrow m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$\rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$

مثال: اگر در کلاس کتاب با تغییر معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت منفی محور x ها 150° است و از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد.

answer

محاسبه مساحت مثلث

با داشتن دو ضلع و زاویه بین در هر مثلثی (نه فقط قائم‌الزاویه)، مساحتش قابل محاسبه است!

$b \sin C = c \sin B$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin C$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ac \sin B$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} bc \sin A$

T بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث های متساوی الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟

$\sqrt{3}(4)$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}(2)$ $1(2)$ ✓ $\sqrt{3}-1(1)$

A

(تمرین کتاب) مساحت شش ضلعی منتظم با طول ضلع ۳ سانتیمتر را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.

answer

(تمرین کتاب) سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید اگر $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ (در ربع چهارم) α

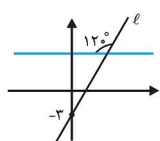
answer

(تمرین کتاب) اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟

answer

(تمرین کتاب) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(0, 2)$ روی آن قرار دارد.

(تمرین کتاب) با توجه به شکل زیر، معادله خط را به دست آورید.



answer

(تمرین کتاب) اگر $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه 240° را به دست آورید.

answer

(امتیازات سال گذشته) درستی رابطه رویدو را بررسی کنید. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 30^\circ$

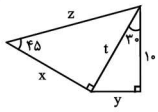
answer

$\frac{\cot 60^\circ - \tan 30^\circ + 5 \cot 45^\circ}{\sec 45^\circ - \sin 90^\circ + 5 \tan 45^\circ}$

(امتیازات سال گذشته) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

answer

(امتحانات سال گذشته) با توجه به شکل، اندازه اضلاع x ، y ، z را به دست آورید.



answer

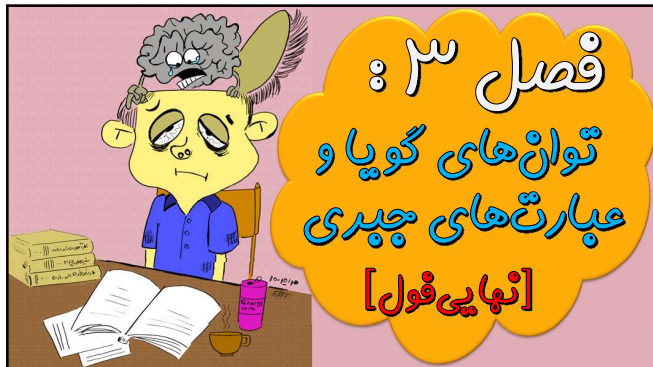
(امتحانات سال گذشته) با فرض $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$

answer

ب) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

answer



ریشه‌ی مام A

ریشه‌ی سوم ۲۷ $\sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow (3) \times (3) \times (3) = 27$

ریشه‌ی سوم -۲۷ $\sqrt[3]{-27} = -3 \Rightarrow (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

ریشه‌ی پنجم -۳۲ $\sqrt[5]{-32} = -2$ ریشه‌ی سوم -۳۴۳ $\sqrt[3]{-343} = -7$

هر عددی دقیقاً یک ریشه‌ی فرد دارد!

ریشه‌ی دوم ۲۵ $(5) \times (5) = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$

ریشه‌ی دوم -۲۵ $(-5) \times (-5) = 25 \Rightarrow -\sqrt{25} = -5$

$x^2 = 25 \Rightarrow |x| = 5$

خواست باشه $\sqrt{-25}$ غلطه! چرا؟!

زوج (هرچیزی) $\geq 0 \Rightarrow x^2 = -16$ ریشه‌ی دوم -۱۶ ؟

هر عددی یا ۲تا ریشه‌ی (قرینه) زوج دارد یا هیچی!

مثال: ریشه پنجم اعداد $1/100000$ و -0.00032 را حساب کنید.

answer

محاسبه مقدار تقریبی ریشه‌ها

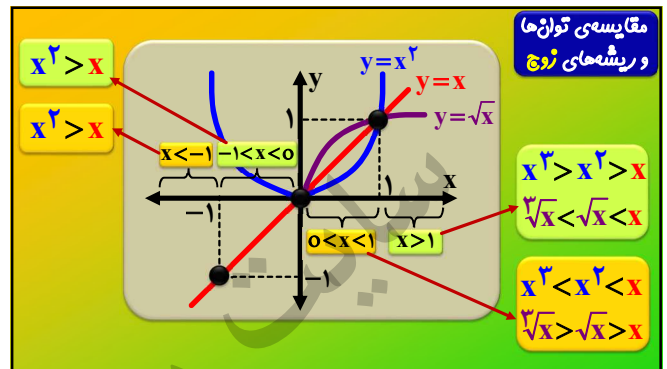
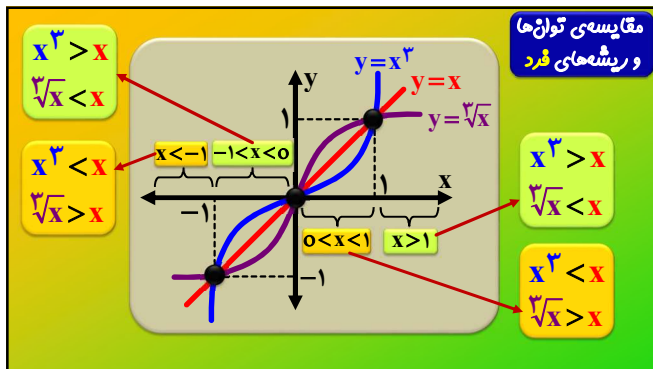
بعضی از ریشه‌ها مقدارشان دقیق است، مانند $\sqrt[3]{27}$ اما گاهی از ما می‌خواهند مقدار تقریبی حساب کنیم مانند $\sqrt[3]{4}$ در این حالت $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{27}$ را بین دو ریشه سوم دقیق قرار می‌دهیم.

از آنجایی که ۲۰ به ۲۷ نزدیک‌تر است، پس $\sqrt[3]{4}$ از $2/5$ بیشتر است، مثلاً عدد $2/7$ را حدس زده و به عنوان جواب ارائه می‌دهیم.

مثال: اگر در کلاس مقدار تقریبی ریشه‌ها را برای هر قسمت محاسبه کنید.

(الف) $\sqrt[3]{-16}$ (ب) $\sqrt{89}$

answer **answer**



if $x > 1 \rightarrow \sqrt[n]{x} \bigcirc \sqrt[m]{x} \quad x^2 \bigcirc x^5$

if $0 < x < 1 \rightarrow \sqrt[n]{x} \bigcirc \sqrt[m]{x} \quad x^2 \bigcirc \sqrt[3]{x^9}$

if $-1 < x < 0 \rightarrow \sqrt[n]{x} \bigcirc \sqrt[m]{x} \quad x^5 \bigcirc x^2$

if $x < -1 \rightarrow \sqrt[n]{x} \bigcirc \sqrt[m]{x} \quad x^5 \bigcirc x^3$

قوانین توان و رادیکال

۱ if $\sqrt[k]{\Delta} \Rightarrow \Delta \geq 0$

۲ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} \Rightarrow \left(\frac{1}{\Delta}\right)^n = \Delta^{-n}$

۳ $a^n \times a^m = a^{n+m} \Rightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{(n-m)} \Rightarrow \frac{a^n}{a^n} = a^0 = 1$

۴ $a^n \times b^n = (ab)^n \Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(اینجا پدانتت زنی ضرب!) $(2^2)^3 = 2^6 \neq 2^{2^3} = 2^8$

۵ $\sqrt[n]{\Delta^m} = (\Delta)^{\frac{m}{n}}$ (نزدیکات تاج سرن ا)

۶ $\sqrt[n]{m} \sqrt[k]{\sqrt[l]{A}} = nmk \sqrt[n]{A}$

۷ $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[m]{B} = A^{\frac{1}{n}} \cdot B^{\frac{1}{m}} = \sqrt[n]{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[m]{B}} = A^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$


۱ مربع دوپهلای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (تجاده)

EX $(x - 2y)^2 =$

EX $x^2 - 6x + 9 =$

EX $9x^2 + 24x + 16 =$

EX $(a + b + c)^2 =$ (مربع سه‌پهلای)

۲ مزدوج $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 

EX $x^4 - 4y^2 =$ EX $(2 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 6) =$

۳ مکعب دوپهله‌ای $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

EX $(3a - 2b)^3 =$

EX $-27x^3 - 36x + 54x^2 + 8 =$

۴ هاق و لاغر $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

EX $x^6 - 343 =$ EX $(1 + \sqrt[3]{x})(1 + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}) =$

۵ یک پهمه مشترک $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

EX $x^2 + 15x - 250 =$

EX $9x^2 - 6x - 8 =$

مثال: (کلاس در کلاس) عبارت $x^6 - 1$ را تا جایی که ممکن است تفرقه کنید.

answer

عبارت گویا

به عبارت‌های کسری می‌گویند که صورت و مخرج آن یک پهمه‌ای است. مثلا $\frac{x^2-1}{x}$ و $\frac{\sqrt{x}-1}{2x}$ و ... و ۳ و ۱۱۱ ... $\frac{\sqrt{x}-1}{2x}$ زیرا چون صورتش پهمه‌ای نیست. کوبه یک عبارت گویا به ازای مقداری از متغیر که مخرج را صفر می‌کند (ریشه‌های مخرج) تعریف نمی‌شود.

مثال: (فعالیت کتاب) عبارت گویای زیر به ازای چه مقداری از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

مثال: (فعالیت کتاب) حاصل کسره‌ای زیر را زیاده آورید و ساده کنید.

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$$

answer **answer**

$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$

answer **answer**

گویا کردن کسر یعنی مخرج را از حالت کنگ و رادیکالی خارج کنیم. دو حالت کلی دارد.

۱ رادیکال های فرجه ۲

EX $\frac{-3}{\sqrt{2}} = \frac{-3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$

EX $\frac{-4}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{-4 \times (\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{5}-\sqrt{7}) \times (\sqrt{5}+\sqrt{7})} = \frac{-4 \times (\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(5-7)} = 2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

نکته $\frac{1}{\sqrt{a+1} \pm \sqrt{a}} = \sqrt{a+1} \mp \sqrt{a} \rightarrow$ EX $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = 2\sqrt{2}+\sqrt{7}$

EX $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}} = -(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ EX $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}} = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}$

۲ رادیکال های فرجه ۳

EX $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3 \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

EX $\frac{4}{\sqrt[3]{25}} = \frac{4 \times \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{5}} = \frac{4\sqrt[3]{5}}{5}$

EX $\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \frac{5 \times (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}) \times (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})} = \frac{5(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(2+3)} = \dots$

EX $\frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})(\sqrt{x}-1)}$

مثال: (فعالیت کتاب) مخرج کسره های زیر را گویا کنید.

$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ **answer**

$\frac{\lambda}{3\sqrt{2}+4}$ **answer**

$\frac{1}{(\sqrt{x^2+1})}$ **answer**

$\frac{x+\lambda}{\sqrt{x}+2}$ **answer**

(تمرین کتاب) جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ریشه های چهارم عدد می باشند.

ب) اگر $\sqrt[3]{16} = a$ باشد، در این صورت حاصل عبارت $a^3 + 5$ برابر است با

answer

الف) $\sqrt{10}$ ب) $\sqrt[3]{7/25}$

پ) $\sqrt[3]{16}$ د) $\sqrt[3]{64}$ **answer**

answer

(تمرین کتاب) در جاهای خالی یکی از علامت‌های $<$ ، $>$ ، $=$ یا \neq را قرار دهید.

$\sqrt[4]{0.0001} \bigcirc 0.1$ $(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$ $(-0.1)^5 \bigcirc (-0.1)^3$

$(0.5)^2 \bigcirc (0.5)^3$ $\sqrt{0.5} \bigcirc \sqrt[3]{0.5}$ $\sqrt{4} \bigcirc \sqrt[3]{4}$

$0 < a < 1 \implies \sqrt{a} \bigcirc \sqrt[3]{a}$ $a^2 \bigcirc a^3$

$a > 1 \implies \sqrt{a} \bigcirc \sqrt[3]{a}$ $a^2 \bigcirc a^3$

(تمرین کتاب) حساب کنید.

$\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

$\sqrt[3]{64}$

$\sqrt{\sqrt{81}}$

(تمرین کتاب) هر یک از عبارت‌های زیر را تا هر ممکن ساده کنید.

$x^8 - y^8$

$x^6 - y^6$

$8a^3 + 27$

$a^3b^6 - 8$

(تمرین کتاب) مخرج کسره‌های زیر را کویا کنید.

$\frac{3}{3 + \sqrt{2}}$

$\frac{8}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2}$

$\frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 1}$

(تمرین کتاب) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$

answer answer

(تمرین کتاب) اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

answer

(امتحانات سال گذشته) حاصل عبارات زیر را به صورت توان گویا بنویسید.

$\sqrt[4]{2\sqrt{3}\sqrt{3}}$

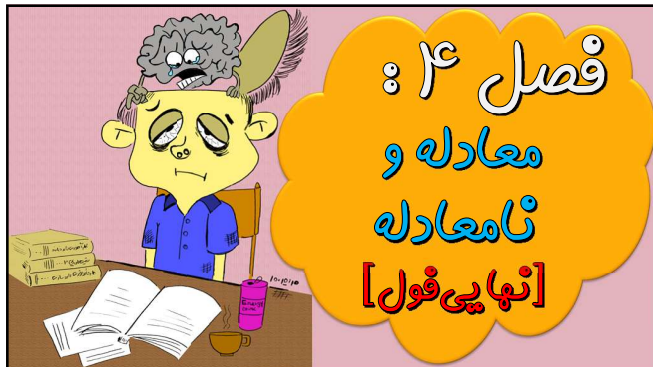
answer

$(\sqrt[4]{2\sqrt{3}})^{48}$

answer

(امتحانات سال گذشته) اگر $\frac{1}{3^y} = 3^{x+y}$ و $2^{x-y} = 8$ باشد، حاصل $x+y$ را به دست آورید.

(امتحانات سال گذشته) اگر $a+b=1$ و $a^2+b^2=5$ و $a^3+b^3=9$ را مقایسه کنید.



معادله درجه ۲ و روش های حلش ← **تجزیه**

مثال $-3x^2 + 12x + 63 = 0 \rightarrow -3(x^2 - 4x - 21) = -3(x-7)(x+3) = 0$

مثال $x^2 + 12x - 45 = 0 \Rightarrow x = ? \rightarrow (x+15)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-15 \end{cases}$

مثال $3t^2 = t$

۲ حل معادله درجه ۲ به کمک ریشه گیری

می دانیم اگر $a > 0$ $a^2 = a$ آنگاه $\square = \sqrt{a}$ یا $\square = -\sqrt{a}$ از این خاصیت برای حل این معادلات بهره می بریم.

مثال $(x-2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-2=4 \Rightarrow x=6 \\ x-2=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$ (کادر در کلاس)

۳ روش مربع کامل **انتقال اول**

مثال $x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow (x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2) + 1 = 0$
 $\rightarrow (x-2)^2 - 3 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 3 \rightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{3} \\ x-2 = -\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{cases}$

مثال $-2x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow -2(x^2 - \frac{x}{2} + (\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2) + 1 = 0$
 $= -2[(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}] + 1 = -2[(x-\frac{1}{4})^2] + \frac{1}{8} + 1 = 0 \rightarrow -2[(x-\frac{1}{4})^2] + \frac{9}{8} = 0$
 $(x-\frac{1}{4})^2 = \frac{9}{16} \rightarrow x - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ or } x - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \rightarrow x = 1 \text{ or } x = -\frac{1}{2}$

۴ روش فرمول کلی یا Δ

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$ & $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ & $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ **دو ریشه** $\Delta > 0$

$x = \frac{-b}{2a}$ **یک ریشه ی مضاعف** $\Delta = 0$

$\alpha(x+\beta)^2 = 0$ **فاقد ریشه** $\Delta < 0$

$x = -\beta$

answer

مثال: (مثال کتاب) از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می فوایم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

همه چیز درباره‌ی تابع درجه ۲ ← $y = ax^2 + bx + c$

ساده ترین فرم سهمی ← $y = x^2$

X	0	±1	±2
y	0	1	4

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و محور X ها با علامت Δ و a

$\Delta > 0$: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Delta = 0$: $y = a(x - x_1)^2$

$\Delta < 0$: تجزیه ناپذیر

دو نقطه فوق مهم در سهمی

۱ عرض اثر میدا

محل پررور سهمی است با محور y ها!

کافیه به جای X قرار بری صفر (همون c)

در فرم گسترده یی $y = ax^2 + bx + c$

$y = -2x^2 + 5x + 6 \rightarrow y(0) = -2(0)^2 + 5(0) + 6 = 6$

$y = 2(x-1)^2 - 5x - 3 \rightarrow y(0) = 2(0-1)^2 - 5(0) - 3 = -1$

۲ راس سهمی $y = ax^2 + bx + c$

نقطه ی روی قله $(-\frac{b}{2a})$ یا قعر $(-\frac{b}{2a})$ سهمی است.

طول آن $(x = -\frac{b}{2a})$ و عرض آن $(y(-\frac{b}{2a}))$ است.

طول راس، میانگین طول هردو نقطه هم عرضه!

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_{\text{راس}} = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

مثال: آگار در کلاس) در هر یک از سهمی های زیر، راس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x+1)^2 - 2$

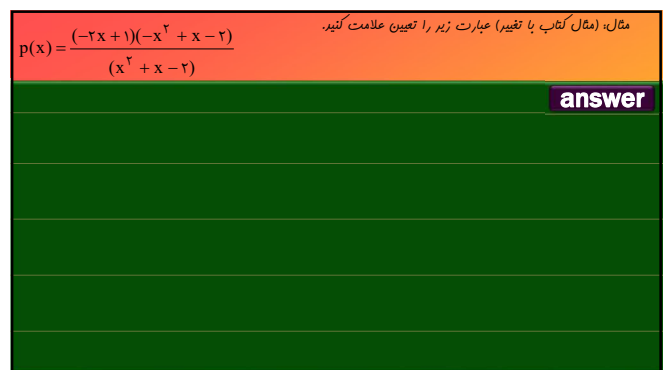
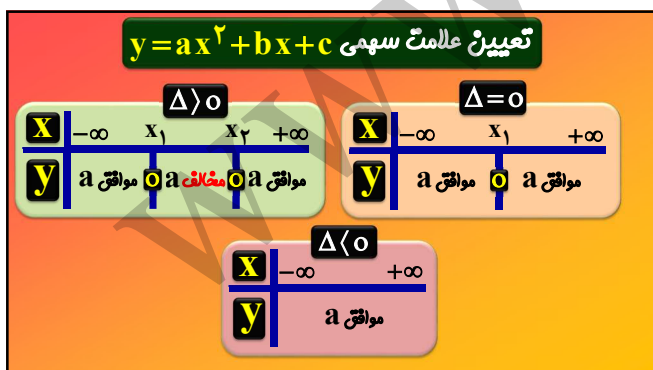
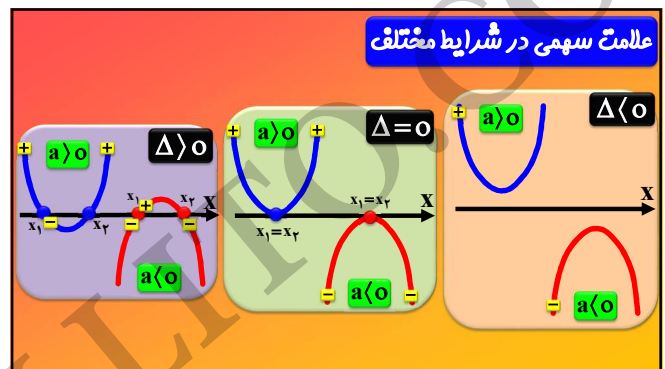
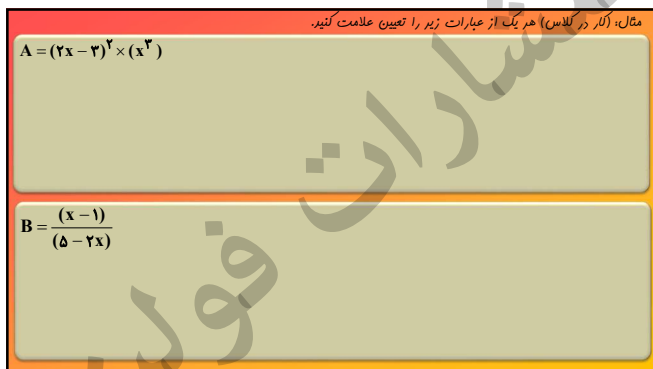
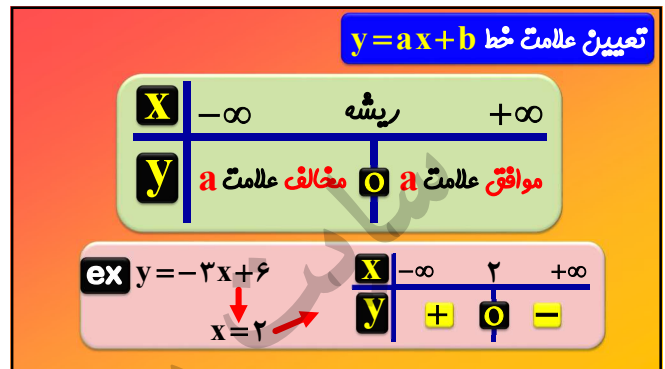
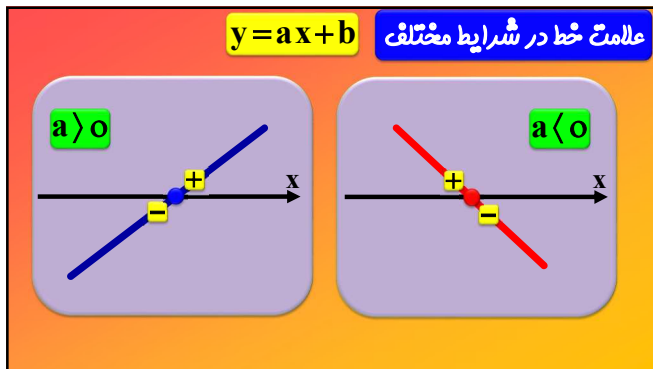
ب) $y = -2x^2 + 1$

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$

طولی که این خط در آن بنا شده، میانگین طول هر دو نقطه هم عرض روی سهمی است.

$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{b}{2a}$



نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، قهرم‌های $A < B$ ، $A \leq B$ ، $A \geq B$ ، $A > B$ را می‌گویند نامعادله!

$3x^2 - x - 2 \geq 0$

$\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$

عزت‌نقدار $a > 0$

۱ if $x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$ ۲ if $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۳ if $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ or } x \leq -a$ ۴ if $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

مثال: برای چه مقادیری از m عبارت $y = -2mx^2 + mx - \frac{1}{2m}$ همواره مثبت است؟ (مثال کتاب با تغییر)

مثال: (کلاس در کلاس) در نامعادله زیر، مجموعه جواب را به صورت بازه پرست آورده و سپس روی محور نشان دهید.

$|5 - 2x| \geq 1$

(تمرین کتاب) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$2x^2 = 250$

$9 - 6z + z^2 = 0$

$4a^2 + 3a = 1$

$b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

(تمرین کتاب) مجموع مربعات دو عدد قدر متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

(تمرین کتاب) طول یک مستطیل ۳cm بیشتر از ۳ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل 25cm^2 باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

(تمرین کتاب) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر چهار سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود. سن هر کدام چقدر است؟

(تمرین کتاب) یک عکس به اندازه ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت 300 cm^2 قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد. ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

answer



(تمرین کتاب) نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$y = -(x+1)^2 - 3$$

$$y = 3x^2 - 2$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

$$y = x - x^2$$

(تمرین کتاب) اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

(تمرین کتاب) در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

$$1 < 2x - 3 \leq 3$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$

$$-2 < \frac{5-x}{2} < 0$$

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

$$x(x^2 + 4) < 0$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

$$|7 - 2x| < 1$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$$

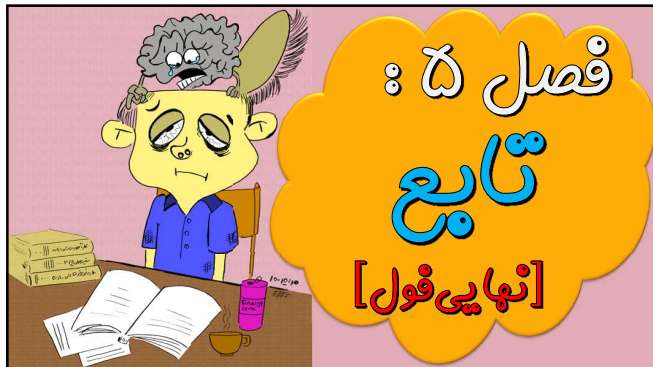
(تمرین کتاب) به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

(امتحانات سال گذشته) به ازای چه مقادیری از a ، $a^2 + (a-1)x + a + 7 = 0$ دارای ریشه مضاعف است؟

(امتحانات سال گذشته) نمودار سهمی محور y ها را به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

(امتحانات سال گذشته) مجموعه جواب نامعادله زیر را به وسیله بازه‌ها نمایش دهید. $\frac{x^2 - 25}{x(x-3)^2} \geq 0$

ریاضیت با من



مفهوم رابطه (R) و زوج مرتب

زوج مرتب هر دو تایی مرتب فاقد خاصیت جابجایی (α, β)

تساوی دو زوج مرتب

if $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$
then $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

مقتضی اول \rightarrow مقتضی دوم
متغیر وابسته \rightarrow متغیر مستقل
دامنه \rightarrow برد
طول \rightarrow عرض
رودی \rightarrow شروی
 $x \rightarrow y = f(x)$

ex اگر دو زوج مرتب $(11, x+y)$ و $(2x-y, 4)$ نشانگر یک نقطه باشند، مقادیر x و y را بیابید.

تعریف رابطه مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب کنار هم (به صورت دیمی)

$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$

نمایش زوج مرتبی تابع تابع رابطه‌ای است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی از آن دارای مقص‌های اول برابر نباشند. اولین برابر بود دومیشونم برابر شه

$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$ ❌ $f = \{(1, 2), (2, 1), (5, 1), (1, 2)\}$ ✅

تابع و خانواده هر بیه (x) به پدرمار (y) داره

مثال: به ازای کدام مقدار a و b ، رابطه $R = \{(1, 2)(3, -b)(1, 2a-1)(3, 2)\}$ یک تابع است؟

نمایش پیکانی تابع (نمودار ون)

$f = \{(1, b), (2, a), (3, b), (4, c)\}$
 $D = \{1, 2, 3, 4\}$ $A = \{a, b, c, d\}$
 $R = \{a, b, c\} \rightarrow R \subseteq A$

نمودار ون زمانی یک تابع را مشخص میکند که از هر عضو مجموعه دامنه دقیقاً یک فلش خارج شود. اینکه به اعضای مجموعه هم دامنه چند فلش یا صفر تا وارد شود فاقد اهمیت است

نمایش نموداری تابع زمانی یک نمودار تابع را مشخص میکند که هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را در حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش تابع با ضابطه ضابطه تابع، رابطه‌ی بین ورودی و خروجی را نشان میدهد.

ex $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

ex $f(2x-1) = x^2 - 3\sqrt{2x} \rightarrow f(3) = ?$

مثال: در تابع $f = \left\{ (1, 2a), (1, 4), (5, \frac{b}{2}) \right\}$ ، اگر مجموعه برد فقط یک عضو داشته باشد، حاصل $a + b$ را بیابید.

مثال: (کار در کلاس) اگر تابعی با نمایش $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را بدست آورید و f را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

مثال: در هر قسمت نمودار یک تابع داده شده. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

(الف)

(ب)

انواع توابع توابعی که از جمع و تفریق چند جمله به وجود می آیند

تابع چندجمله‌ای درجه یک چندجمله‌ای رو بزرگترین توانش مشخص میکنه

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$

یه جملش! ضریبش!

درجه $f(x) = -3x^6 + 5x^5 - 3$ \rightarrow 6

درجه $f(x) = 2x^8 - 3x - \frac{1}{x} + 3$ \rightarrow 8

توابع چندجمله‌ای خاص

1 **تابع ثابت** ضابطه‌ی آن $y = k$ و نمودارش یک خط افقی است.

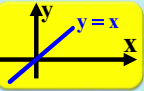
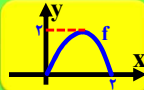
ex $f(x) = (n^2 + n - 6)x + \sqrt{-n}$ تابعی ثابت است. مقدار n کدام است؟

2 **تابع خطی** ضابطه‌ی آن $f(x) = mx + d$ است و نمودارش خطی است با شیب m و عرض از مبدأ d .
پُر واضح است که تابع خطی یک چندجمله‌ای از نوع درجه یک می‌باشد.

۳ تابع همانی ضابطه‌ی آن $f(x) = x$ و نمودارش نمایش دهنده تابع اول و سوم است.

در تابع همانی همواره دامنه برابر بردار است.

هر کردی گردد نیستا یعنی هر تابعی که دامنه و بردش برابر باشد همانی نیستا باید ضابطه یا نمودارش هم همانی باشدا

ex   اما $D_f = R_f = [0, 2]$

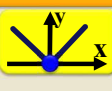
مثال: نمودار پیکانی و مجموعه $f = \{(1,1), (a,a)\}$ هر کدام مربوط به یک تابع همانی است.

مثال: اگر در کلاس یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ باشد.

مثال: اگر در کلاس یک تابع ثابت مثال بزنید که دامنه آن \mathbb{R} عضو باشد.

تابع قدرمطلق

مفهوم قدرمطلق | قدرمطلق تابعی است مثبت کن!

$-3 = 3$ $|x^2 + 1| = x^2 + 1$ $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 

$|-x^2 + 2x - 1| = |-(x-1)^2| = (x-1)^2$

خلاصی از شش قدرمطلق: متویات داخلشو تعیین علامت کن! جاهایی که مثبتش فووش خارج میشه و جاهایی که منفیه، قرینش!

$|\Delta| = \begin{cases} \Delta, & \Delta \geq 0 \\ -\Delta, & \Delta < 0 \end{cases}$

تابع چندضابطه‌ای


به تابعی به این فرم که برای هر عدد دامنه، یک معادله دارد. توابع پتر ضابطه‌ای (قطعه‌ای) نامیده می‌شود.

مثال: (مثال کتاب با تغییر) نمودار تابع قطعه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x-3 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و بردش را بیابید.


مثال: در مثال قبلی حاصل $f(f(\sqrt{2})) + f(-1)$ را بیابید.

انتقال ببینیم با هریک از اعمال زیر، نمودار تابع $f(x)$ چگونه انتقال می‌یابد:

۱ $f(x) + k$ نمودار $f(x)$ را k واحد در جهت علامت k روی محور y ها حرکت بده!

ex $y = x^3 - 1$ 

۲ $f(x+k)$ نمودار $f(x)$ را k واحد در خلاف جهت علامت k روی محور x ها حرکت بده!

ex $y = (x-1)^2$ 

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^2 + 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y = |x+1| + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

(تمرین کتاب) الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(-50)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را بدست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

(تمرین کتاب) برای یک تابع فضا می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش چیری آن را بنویسید.

(تمرین کتاب) اگر در برای تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$ و $g(-2) = \frac{1}{3}$ و $g(1) = 5$ و $g(0) = 2$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

(تمرین کتاب) تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $(\frac{1}{3}, 0.5]$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید.

(تمرین کتاب) کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

(تمرین کتاب) نمودار تابعی یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض a قطع می‌کند. نمایش چبری این تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۹۲) در تابع $f = \{(2, 3), (3, 1), (4, 2), (1, 4)\}$ مقدار $f(4) - 2f(2)$ برابر با چند است؟

(امتحانات سال گذشته) مقدار a را طوری به دست آورید که رابطه $A = \{(1, 2), (3, 2a), (2, a-7)\}$ یک تابع باشد.

(امتحانات تیزهوشان ۱۳۹۲) نمودار تابع $y = -|x+1| + 2$ را رسم کنید.

(امتحانات سال گذشته) الف) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.

ب) حاصل $f(-2) + f(1)$ را به دست آورید.

پ) حاصل $f(f(-2))$ را به دست آورید.

(امتحانات سال گذشته) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و برد آن نیز $(0, +\infty)$ است.

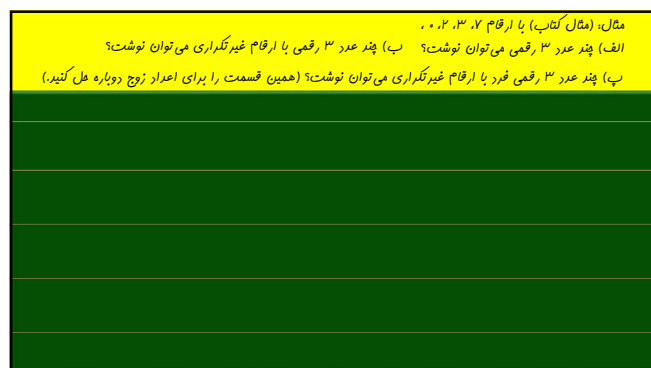
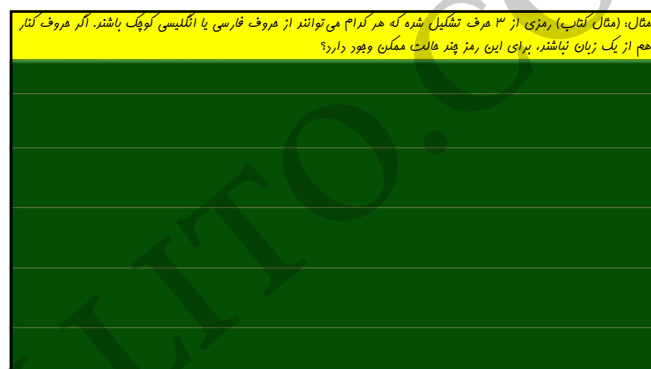
ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و برد آن $(2, +\infty)$ است.

پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

ت) $f(1) = \frac{f(2)}{2}$ آنگاه $f(x) = 2x + 1$



سایت رسمی انتشارات فولیتو
WWW.FULLITO.COM



جایگشت جایگشت پندر شی همان کل حالات قرارگیری آن اشیا کنار هم است. (جای-بکشت)

پس تعداد جایگشت پندر شی همان تعداد کل حالات قرارگیری آن اشیا کنار هم است. حالا کمی برای مدل جایگشتی که اشیا میتوانند داشته باشند شرطی اعمال میشود که با در نظر گرفتن، مسئله را حل می‌کنیم.

انواع جایگشت

فکتوریل جایگشت n شی متمایز کنار هم می‌شود $n!$

$0! = 1! = 1$ $2! = 2 \times 1$ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2!$ $4! = 4 \times 3! = 24$

$5! = 5 \times 4! = 120$ $6! = 6 \times 5! = 720$ $n! = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k)!$

مثال: علی و ۳ نفر از دوستانش می‌خواهند روی یک نیمکت کنار هم بنشینند. به چند حالت این اتفاق می‌تواند بیفتد، به طوری که علی همواره وسط بنشیند؟

نکته: جایگشت n شی متمایز که k تای آن‌ها تکراری است می‌شود $\frac{n!}{k!}$

مثال: با حروف کلمه «تالان» چند کلمه ۵ حرفی متمایز می‌توان ساخت؟

تبدیل (جایگشت کتبی) تعداد جایگشت‌های k تایی از n شی متمایز $p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

می‌شود دو مرحله: مرحله اول انتخاب k شی، مرحله دوم جایگشت این k شی. در واقع می‌شود تعداد کل انتخاب‌های k تایی از n شی و بعد جایگشت‌های گروه‌های کوچک انتخاب شده.

T هرگاه $P(2n, 3) = 2 \cdot P(n, 2)$ باشد، مقدار n کدام است؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

A

مثال: (مثال کتاب) با حروف کلمه «چنانگردی» و بدون تکرار حروف:

(الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تای آن‌ها به «ی» ختم می‌شوند؟

(ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «ر» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

(پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها به گردی ختم می‌شوند؟

(ت) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «چنان» چهار حرف اول باشد؟

(ث) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «چنان» کنار هم باشند؟

(ج) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شوند؟

ترکیب ترکیب k تایی از n شی متمایز میشود تعداد کل انتخاب‌های k تایی از آن n شی، بطوریکه ترتیب قرارگیری در آن گروه‌های کوچک انتخاب شده مهم نباشد. فرمولشو ببین

$c(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

در واقع هر جا خواستیم فقط انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب شده‌ها مهم نبود از ترکیب استفاده می‌کنیم.

T اگر $\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = 26$ باشد، مقدار n کدام است؟

۵۳ (۲) ۵۲ (۱) ۵۴ (۳) ۵۵ (۴)

A

مثال: (مثال کتاب درسی) از میان ۶ کتاب مختلف:

(الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

(ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

نکته برای مناسبی سرعت ترکیب از فرمولای بسیار مهم زیر بهره ببر در ضمن یایر برانید که

$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2!}$ $\binom{n}{3} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3!}$

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های n تایی یک مجموعه n عضوی.

T هرگاه $\binom{18}{n} = \binom{18}{2n-3}$ باشد، مقدار n کدام می تواند باشد؟ $۵(۱)$ $۶(۲)$ $۷(۳)$ $۸(۴)$

A

مثال: (مثال کتاب درسی) در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۳ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را تشکیل داد اگر:

الف) کمیته ۳ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از ۳ کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً ۲ داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

(تمرین کتاب) در یک شهر صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۴ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهر وجود داشته باشد، چند است؟

(تمرین کتاب) یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سوال ۴ گزینه‌ای و ۵ سوال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) مجبور باشد به همه سوال‌ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

(تمرین کتاب) در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

(تمرین کتاب) با حروف کلمه کلل پیرا و بدون تکرار حرف،

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «کل» شروع می شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

(تعمین کتاب) یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ مسایدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه بایز جلسه‌ای ۵ نقره قیمت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود. هرگاه، الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

(تعمین کتاب) کل فروشی در فروشگاه خود ۱۵ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شافه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

(تعمین کتاب) هفت نقطه A، B، C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

(تعمین کتاب) یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم مختلف می‌تواند درست کند هرگاه،
الف) هیچ مفروضی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟
ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟
پ) سه ادویه هستند که هر سه با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟
ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

(تیزهوشان ۱۳۰۲) با ارقام ۰ و ۱ و ۵ و ۷ و ۸ و بدون تکرار ارقام:
الف) چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟
ب) چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۷۰۰ می‌توان نوشت؟
پ) چند عدد سه رقمی مقرب ۵ می‌توان نوشت؟

(امتحانات سال گذشته) اگر $P(n, 4) = 12C(n-2, 2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

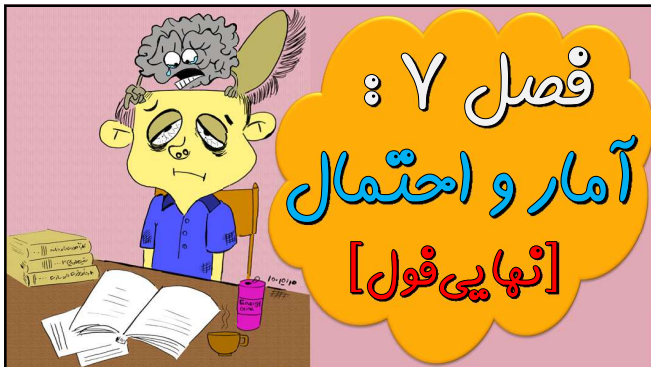
(امتحانات سال گذشته) به پنج طریق می توان با ۵ دفتر و ۳ پسر یک هفت تشکیل داد به طوری که هیچ دو پسری کنار هم قرار نگیرند؟

(امتحانات سال گذشته) می خواهیم از بین ۱۰ نفر که ۳ تای آن ها برادرند، یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم. به چند حالت می توانیم این تیم را انتخاب کنیم به شرطی که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم. ب) هیچ برادری نباشد. پ) حداقل یک برادر در تیم باشد.

(امتحانات سال گذشته) از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

ریاضیت با من



مفاهیم ابتدایی

پدیده (آزمایش) تصادفی پدیده‌ای که از قبل نمیتوان نتیجه دقیقش را درس زد، اما تعداد کل نتایج ممکنش را می‌دانیم. مانند پرتاب تاس یا جنسیت فرزندان.

فضای نمونه‌ای به مجموعه کل نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای می‌گوییم.

این مجموعه را با S نشان می‌دهیم. مثلاً در پرتاب یک تاس، S مجموعه اعداد ۱ تا ۶ است.

پیشامد هر پیشامد یک زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای است که ممکن است رخ ببرد یا خیر.

برآورد همان نتیجه آزمایش است. اگر برآورد عضو پیشامد A باشد، می‌گوییم A رخ داده است.

$$\emptyset \subseteq A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S)$$

پیشامد قطعی پیشامدی که قطعاً رخ می‌دهد. همان فضای نمونه‌ای است. ($A=S$)

پیشامد نشدنی پیشامدی که قطعاً رخ نمی‌دهد. همان تهی است. ($A=\emptyset$)

نکته تعداد کل پیش‌آمدهای ممکن روی فضای نمونه‌ای n عضوی S می‌شود: 2^n

T خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. از لحاظ جنسیت فرزندان، چند پیشامد برای آن‌ها قابل تعریف است؟ (۱) ۸

۲۴ (۲)	۲۵۶ (۳)	۱۲۸ (۴)
--------	---------	---------

A

فضاهای نمونه‌ای معروف

نسبت n فرزند

پرتاب n تاس پشت سرهم یا باهم 2^n

پرتاب n سکه پشت سرهم یا باهم 2^n

انتخاب n شی از یک گروه m تایی $\binom{m}{n}$

پرتاب ۱ سکه و ۱ تاس 12

T در یک خانواده‌ای که دارای ۵ فرزند است، پیشامد داشتن حداکثر یک پسر، چند عضوی است؟

۵ (۱)	۶ (۲)	۷ (۳)	۸ (۴)
-------	-------	-------	-------

A

مثال: فضای نمونه‌ای در یک آزمایش تصادفی به صورت $S=\{8,5,a,b\}$ است. اگر پیشامد A به صورت $A=\{8,5\}$ و نتیجه آزمایش $\{a\}$ شده باشد، صمیم و غلط بودن موارد زیر را مشخص کنید. با تشکر...

(الف) پیشامد A رخ داده است.

(ب) پیشامد A رخ نداده است.

(پ) A یک پیشامد قطعی است.

(ت) $\{b\}$ یک پیشامد تشرنی است.

(ث) $\{8,5,a,b\}$ یک پیشامد هتمی است.

مثال: (مثال کتاب) فرض کنید خانواده‌ای ۳ فرزند دارد. در هر مورد از موارد زیر، پیشامد را به صورت یک مجموعه نشان دهید.

(الف) پیشامد اینکه دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد.

(ب) پیشامد اینکه حداقل یک دختر در خانواده متولد شده باشد.

(پ) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد.

(ت) پیشامد اینکه تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد.

مثال: (مثال کتاب درسی) یک تاس و دو سکه را با هم می اندازیم.
الف) فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

ب) پیشامد آنکه دهر دو سکه رو و تاس زوج باشد را تشکیل دهید.

ب) پیشامد آنکه دهر دو سکه پشت یا تاس ۵ بیاید را تشکیل دهید.

قوانین احتمال

قوانین پیری فصل احتمال، کنی قوانین مجموعه هاست (هرای)

۱ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

۲ $P(A') = 1 - P(A)$

۳ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

۴ $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$

۵ $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$

دگرگان

دگرگان

پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد ناسازگار اگر نتوانند باهم رخ دهند. در واقع اشتراک آن دو تهی است. در نتیجه احتمال اشتراکشان (رفرار همزمان) صفر است.

$A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$

T احتمال قهرمانی پرسپولیس در لیگ برتر، $\frac{1}{6}$ و همین احتمال برای استقلال $\frac{1}{4}$ است. چقدر احتمال دارد یکی از این دو تیم قهرمان لیگ شوند؟ $\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{4}{85}$ (۴)

A

قرمول احتمال

احتمال رفرار پیشامد A میشود ، $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ، $0 \leq P(A) \leq 1$

مثال: (مثال کتاب) هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲، ۳، ۴ و بدون تکرار رقم می توان ساخت را روی یک کارت می نویسیم و آن ها را در کیسه ای قرار می دهیم. سپس یک کارت برمی داریم. اگر پیشامدهای A و B را به ترتیب دقارچ شدن عدد زوج و دقارچ شدن عدد فرد تعریف کنیم. شانس رفرار کرا ۳ پیشامد بیشتر است؟

مثال: (مثال کتاب درسی) در پیچه ای ۳ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این پیچه ۳ مهره به تصادف خارج کنیم. چقدر احتمال دارد: الف) هر سه مهره آبی باشند. ب) هر سه مهره هم رنگ باشند.

ب) دقیقاً ۲ مهره هم رنگ باشند. ت) هرکثر ۱ مهره قرمز خارج شود.

مثال: (مثال کتاب) اگر دو تاس را با هم پیندازیم. چقدر احتمال دارد: الف) هر دو تاس زوج باشد؟ ب) مجموع ۲ تاس ۸ یا هر دو فرد باشد؟ ت) حاصل ضرب ۲ عدد رو شده ۱۲ باشد؟

مثال: (مثال کتاب) اگر مروفه کلمه "پولنگری" را به تصادف کنار هم قرار دهیم، مقدار احتمال دارد که: (الف) حرف «ی» آخر باشد؟ (ب) دو حرف «ی» و «د» کنار هم باشند؟ (پ) با حرف «ج» شروع شود و به حرف «ی» ختم شود؟

مقدمت علم آمار
آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.
علم آمار
مجموعه روش‌هایی است برای جمع‌آوری داده‌ها، سازماندهی، نمایش و تفسیر آن‌ها است که منجر می‌شود به قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد آزمایش‌های تصادفی.
جامعه (جمعیت)
می‌شود مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد. هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامیم.
اندازه یا حجم جامعه
تعداد اعضای یک جامعه را می‌گویند. برای مثال دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه به حساب بیایند که تعداد آن‌ها، حجم این جامعه است.

نمونه
بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شوند. هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده را عضو نمونه می‌گویند.
نکته
عمل نمونه‌گیری باید با دقت انجام شود. نمونه‌ای مناسب است که: ۱) شانس حضور همه‌ی اعضای جامعه در آن یکسان باشد. ۲) انتخاب ما کاملاً تصادفی باشد. (یعنی انتخاب از اعضای خاصی نباشد)
اندازه یا حجم نمونه
تعداد اعضای یک نمونه را می‌گویند.
متغیر و مقدارش
متغیر یک ویژگی از اعضای جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود. معمولاً متغیر یک عدد است و از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند. مانند وزن بچه‌های کلاس عددی را که به یک متغیر نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌نامند.

T
قرار است میزان علاقه خانم‌ها به ورزش شنا را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، کدام نمونه‌گیری برای بررسی این مورد مناسب است؟
۱) انتخاب خانم‌های فامیل ۲) انتخاب خانم‌هایی از چند شهر کشور ۳) انتخاب خانم‌های تهرانی ۴) انتخاب خانم‌های ورزشکار
نکته
اندازه‌ی نمونه کوچکتر یا مساوی اندازه‌ی جامعه است.
نکته
برای بدست آوردن اطلاعات اعضای یک جامعه دو روش وجود دارد: ۱) اگر حجم جامعه بزرگ باشد از نمونه‌گیری استفاده می‌کنند. (اندازه نمونه از جامعه کمتر) ۲) اگر حجم جامعه کوچک باشد از سرشماری استفاده می‌کنند. (اندازه نمونه مساوی جامعه) سرشماری فرآیندی زمان‌گیر، هزینه‌بر و انرژی‌گیر است.

جمع‌آوری داده‌ها
برای جمع‌آوری داده‌ها به منظور نمونه‌گیری ۴ راه زیر پیش پای ماست:
۱ پرسش
در این روش به صورت شفاهی یا کتبی از افراد سوال و تحقیق می‌کنیم.
EX
مانند محبوب‌ترین شهر ایران برای مسافرت.
۲ آزمایش
در این روش مقدار متغیر را اندازه‌گیری می‌کنیم. (نمونه‌ها رو دونه‌رو آزمایش می‌کنیم.)
EX
مانند گروه فونی کارمندان بانک فلان شعبه.
۳ داره‌های از پیش تهیه شده
در این روش به اطلاعات مرکز آمار مراجعه می‌کنیم.
EX
مانند میانگین درصدهای ریاضی تهرانی‌ها در کنکورهای ده سال اخیر

۴ مشاهده و ثبت
در این روش می‌بینیم و یادداشت می‌کنیم. یا فردمان یا یک شغل دیگر...
EX
مانند تعداد ماشین‌های عبوری از پل فرخ قمرز چهارراه پارک وی در یک روز
(انواع متغیرها)
متغیرها یا کمی‌اند یا کیفی‌اند. اول برویم سرخ متغیرهای کمی.
متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری می‌باشند. مثلاً تعداد فرزندان یک خانواده و وزن آن‌ها متغیر کمی‌اند. متغیر کمی هم خود به ۲ دسته تقسیم می‌شود: الف) متغیر کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها نیز بتواند اختیار کند. مقدار آن از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آید و طبیعتاً می‌تواند یک عدد اعشاری شود. برای مثال وزن یک دانش‌آموز می‌تواند ۴۵، ۴۶ یا هر مقدار بین این دو باشد.

(ب) متغیر کمی گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد، مقدار آن بوسیله اندازه‌گیری و از طریق شمارش بدست می‌آید و طبیعتاً فقط می‌تواند مجموعه اعداد حسابی را اختیار کند.. برای مثال تعداد فرزندان یک خانواده یک متغیر کمی گسسته است.

متغیر کیفی متغیرهایی‌اند که قابل اندازه‌گیری نمی‌باشند. مثلاً گروه خونی افراد و پاسخ سوال «میزان لذت بردن از آشپزی» متغیرهایی کیفی‌اند. این متغیر نیز خودش دو نوع دارد.

الف) متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. برای مثال سطح تحصیلات (دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد، دکتری).

ب) متغیر کیفی اسمی (غیر ترتیبی): متغیری کیفی است که ترتیبی نیست، پس طبیعتاً دارای ترتیب طبیعی‌ای نمی‌باشد.

برای مثال جنسیت (مرد و زن) یا رنگ لباس‌های یک فروشگاه.

(تمرین کتاب) سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم؛ الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آن که «دو تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.

(تمرین کتاب) می‌فهمیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت گیرد، مقدار احتمال دارد:

الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟ ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

(تمرین کتاب) یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۵۸ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، مقدار احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

(تمرین کتاب) اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، مقدار احتمال دارد:

الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

ب) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

(تمرین کتاب) کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است؟

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه است.

پ) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

(تمرین کتاب) نوع هر متغیر را بنویسید.

(الف) میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر

(ب) نوع بارندگی (باران، برف)

(پ) تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند.

(ت) میزان دمای هوا

(ث) شدت آلودگی هوا (زیار، متوسط، کم)

(ج) انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)

(چ) شدت بارندگی (زیار، متوسط، کم)

(تمرین کتاب) جدول زیر را کامل کنید.

متغیرهای دانش آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر کسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن						
نمره ریاضی نهم						
پنسیل (دقت، پسر)						
قر						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط رو به پایین)						
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شلفص توره بدن						

(تمرین کتاب) شکل زیر یک جامعه فرضی را نشان می دهد که اعضای آن را با شماره های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده ایم.

همچنین اعضای نمونه با خط آبی رنگ انتخاب شده اند. به سوالات زیر پاسخ دهید:



(الف) اندازه جامعه چه عددی است؟

(ب) اندازه نمونه انتخابی چه عددی است؟

(پ) اعضای نمونه انتخابی را بنویسید؟

(امتحانات سال گذشته) دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه:

مجموع دو تاس کمتر از ۵ باشد چقدر است؟

(امتحانات سال گذشته) در چیده ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

(امتحانات سال گذشته) نوع هر متغیر را مشخص کنید.

(الف) میزان تحصیلات

(ب) گروه فونی افراد

(پ) تعداد طبقات یک ساختمان

(ت) زمان تأثیر یک دارو



سایت رسمی انتشارات فولیتو
WWW.FULLITO.COM