

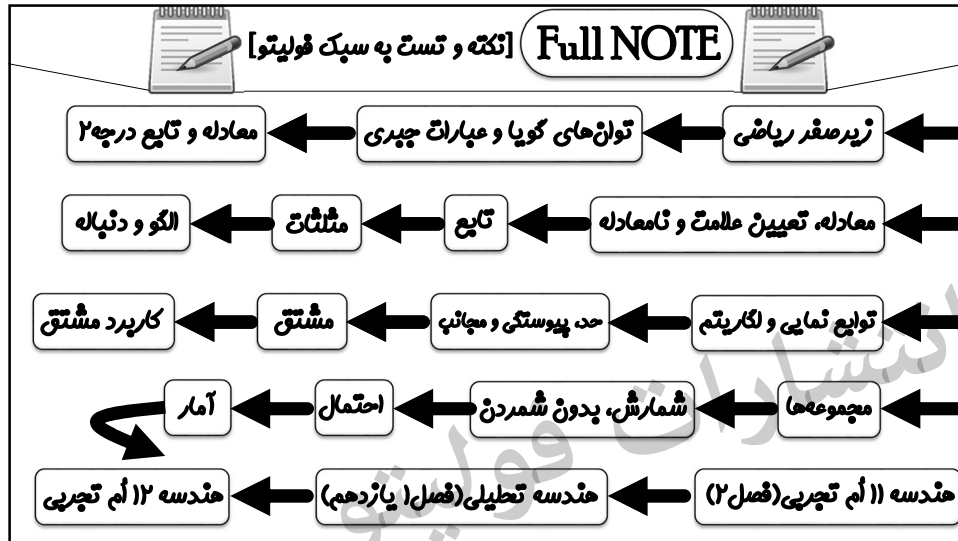
پیش نیازها: زیر صفر + توان های گویا + ... + معادله و نامعادله + تابع + مثلثات + عدد + مشتق

کاربرد مشتق

بودجه بندی این فصل در کنکور؟

رشته ریاضی (۲۲)

رشته تجربی (۲۲)



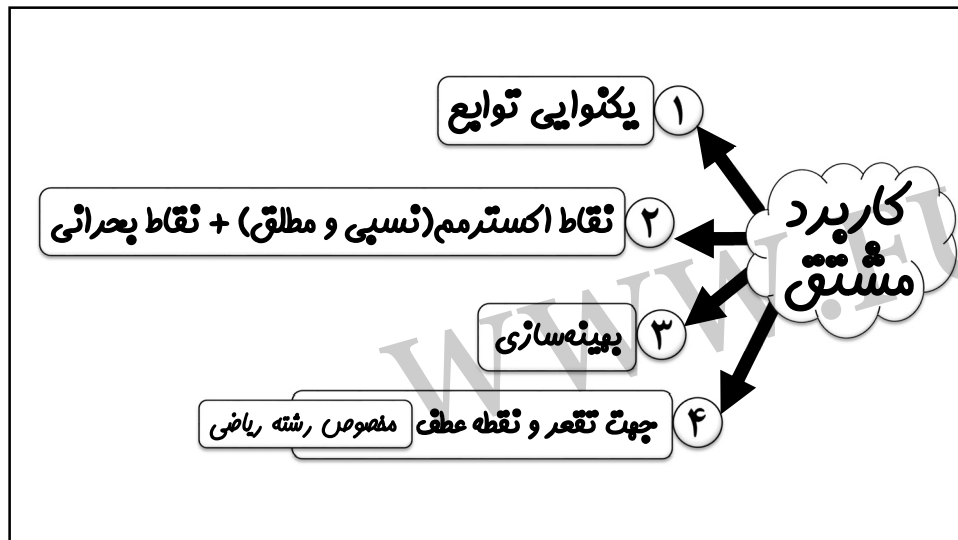
آزمون یکنوایی توابع

اگر بخواهیم پی ببریم که تابع f در چه بازه ای صعودی آید یا نزولی آید است، کافی است تابع f' را تعیین علامت کنیم در خواصی که مقدارش مثبت (منفی) است، تابع آید (ن) است.

T به ازای کدام مقدار k نمودار تابع $f(x) = (k+1)x^3 + (2k-1)x^2 + 3$ همواره نزولی است؟

| | | | |
|------|-------|-------------------|--------------------|
| ۲(۱) | -۱(۲) | $\frac{1}{3}$ (۳) | ۴(۴) هیچ مقدار k |
|------|-------|-------------------|--------------------|

A



T تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 9$ در بزرگ ترین بازه ممکن به صورت (a, b) نزولی اکید است. شیب خط مماس بر نمودار این تابع در $x_0 = \frac{a+b}{2}$ کدام است؟

$-48(2)$ ✓ $-45(1)$
 $-54(4)$ $-42(3)$

A

T اگر بزرگ ترین بازه ای که تابع $f(x) = \frac{x+a}{x^2+5}$ در آن صعودی است، به صورت $[-5, b]$ باشد، مقدار b کدام است؟

$-1(4)$ $1(3)$ ✓ $3(2)$ $5(1)$

A

توجه در بازه ای که ریشه های مخرج تابع عضو آن هستند، تابع قطعاً غیرکلتواس است! هر ایا

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x}, (-1, 1)$

$f(x) = \frac{x}{x^2-2x}, (-1, 1)$

$f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x}, (-1, 1)$

$f(x) = \frac{x}{x^2}, (-1, 1)$

T نمودار تابع با ضابطه $y = (x^2 - 3x)|x|$ در کدام بازه نزولی است؟

$(0, 3)(1)$ $(-\infty, 2)(2)$ ✓ $(2, +\infty)(3)$ $(0, +\infty)(4)$

A (اول با تعیین علامت از شر قدر مطلق خلاص شو...)

T تعداد بازه هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن ها اکیداً نزولی است باشد، کدام

کدام است؟ (ریاضی داهل ۱۳۰۰)

۲(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۵(۴)

A سعی کن صورت رو بچوری با اتحاد مزدوج تغییر بدهی که بتونی بعرض صورت و مخرج رو تفکیک کنی...

T به ازای چند مقدار صحیح از a تابع $y = \frac{ax+2}{x+a-1}$ در بازه $(0, 3)$ نزولی اکید است؟

۱(صفر) ۲(یک) ۳(دو) ۴(چهار)

A مشتق رو تعیین علامت کن و ببین کجاها علامتش منفیه... بعد اینکه معادله قائمش هم نباید در بازه داده شده پیفته

نقاط اکسترمم (نسبی و مطلق) و مفهومی به ماکنیمم یا مینیمم می‌گویند اکسترمم.

مینیمم (ماکنیمم) نسبی نقطه‌ای $x=c \in D_f$ را مینیمم (ماکنیمم) نسبی برای تابع f می‌گویند، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض نقاط همسایگی آن باشد.

توجه شرط لازم اکسترمم نسبی شدن یک نقطه، وجود همسایگی (راست و چپ) اطراف آن است.

کاربرد مشتق

۱ یکنوایی توابع

۲ نقاط اکسترمم (نسبی و مطلق) + نقاط بحرانی

۳ بهینه‌سازی

۴ جهت تقعر و نقطه عطف

مفصوص رشته ریاضی

T کمترین مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 4 & x > 1 \\ |x+1| - 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ (x+3)^2 - 3 & x < -1 \end{cases}$ برابر است با:

A هر چه راه داد با رسم نمودار نقاط اکسترم نسبی، مطلق یا هر ویژگی خواسته شده از تابع را بیابید...

توجه اگر تابع در نقطه اکسترم خود مشتق پذیر باشد، قطعاً مشتقش صفر است! پس حواستان باشد که یک تابع در طول اکسترم خود یا مشتق ناپذیر است، یا مشتق پذیر و مقدار مشتقش صفر است!

T اگر $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(-2, 1)$ دارای اکسترم نسبی باشد، مقدار a و نوع اکسترم کدام است؟ (۱) $-\frac{4}{3}$ ، مینیم (۲) $-\frac{4}{3}$ ، ماکزیم (۳) $\frac{4}{3}$ ، ماکزیم (۴) $\frac{4}{3}$ ، مینیم

مینیم (ماکزیم) مطلق نقطه‌ی $x=c \in D_f$ را مینیم (ماکزیم) مطلق برای تابع f میگوئیم، هرگاه عرضش کوچکتر (بزرگتر) یا مساوی عرض تمام نقاط دامنه‌اش باشد

توجه برای اکسترم مطلق شدن، وجود همسایگی اهمیتی ندارد، چون عرضش با کل نقاط مقایسه میشود!

توجه هر اکسترم مطلق می‌تواند نسبی هم باشد (چه زمانی؟) و هر اکسترم نسبی میتواند مطلق هم باشد (چه زمانی؟)

بدست آوردن نقاط اکسترم نسبی از ضابطه

برای یافتن اکسترم نسبی آله تونستیم نمودار رو رسم می‌کنیم ولی از آزمون مشتق اول هم میشه استفاده کرد!

آزمون مشتق اول تابع مشتق را بدست آورده و تعیین علامت می‌کنیم علامت مشتق در هر بازه، نوع یکنوایی تابع را مشخص می‌کند! با تعیین جهت یکنوایی در جدول، نقاط اکسترم نسبی مشخص می‌شوند!

T هرگاه $f'(x) = (x+1)^2(3-x)$ باشد در این صورت وضعیت اکسترم های تابع f کدام است؟ (۱) مینیم نسبی (۲) ماکزیم نسبی (۳) یک مینیم و یک ماکزیم نسبی (۴) فاقد اکسترم نسبی

T نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است.
طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟ (تقریبی دافل ۱۳۰۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 3

A مشتقش باید تو صفر بشه صفر... (پرا ۱۶۱)

T شکل روبه رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$ است.
مقدار b کدام است؟ ۱) 2 ۲) 1 ۳) -1 ۴) 0

A مشتقش باید تو صفر بشه صفر... (پرا ۱۶۱)

نقاط بحرانی
نقطه‌ای $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم اگر یا $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ تعریف نشده باشد.

توجه اگر دامنه‌ی تعریف تابع f بازه‌ی $[a, b]$ باشد، نقاط a و b بحرانی به حساب می‌آیند.

بدست آوردن نقاط بحرانی از ضابطه
یافتن نقاط بحرانی توابع خوش‌قلبی (تک‌ضابطه‌ای بدون قدرمطلق و جزءصیح):

اگر نقطه درونی دامنه $\xrightarrow{A=0} f'(x) = \frac{A}{B}$ مشتق بگیرد
باشند، بحرانی هستند $\xrightarrow{B=0}$

T نقطه $A(-1, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟
۱) -3 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) 3 ۴) $\frac{1}{3}$ (ریاضی دافل ۱۳۰۱)

A

در توابع پندریابده ای اولاً برای هر ضابطه هداکانه نقاط بهرانی را بدست آوردا
ثانیاً نقاط مرزی را هداکانه بدرسی کنیدا (در چه صورت نقاط مرزی هز نقاط بهرانی اند؟)

T تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 7x + 1 & 0 < x \leq \frac{4}{3} \\ \sqrt{3-5x} & \frac{4}{3} < x \leq 3 \\ -x^2 + 7x & 3 < x < 4 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟
(۱) سه (۲) چهار (۳) پنج (۴) شش

A

T نقاط بهرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) ۹/۲

A

T اگر $f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$ باشد، در این صورت مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع f کدام است؟ (۱) $\{-2, 2\}$ (۲) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ (۳) $\{-2, 0, 2\}$ (۴) $\{-7, 0, 1\}$

A (اول اون فرم رادیکالیو به صورت توانی بنویس، بعد ضرب کن و بعدش مشتق بگیر...)

T تابع f با ضابطه $f(x) = |x^2 - bx + 5|$ دارای ۳ نقطه بحرانی است. تعداد اعداد صحیحی که b نمی تواند بپذیرد کدام است؟ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) بی شمار

A (فقط تمت به شرایطه که قدرمطلق سومی ۳ تا نقطه بهرانی میده...)

تشخیص نقاط بحرانی در نمودار، رسم یک خط مماس، همه چیز را مشخص می کند

در هر کدام از سه حالت زیر در نمودارها، نقطه بحرانی داریم و لاغیرا ببینید:

۱

خط مماس افقی باشد

مشتق موجور و صغرا

۲

خط مماس قائم باشد

مشتق ناموجور است

۳

خط مماس قابل رسم نباشد

مشتق ناموجور است

توجه هر اکسترممی بحرانی است، اما هر بحرانی ای اکسترمم نیست

یافتن اکسترمم های مطلق در توابع پیوسته با روش فیلترینگ

یک قضیه هست که می گوید اگر تابع f در $[a, b]$ پیوسته باشد، عتدا در این بازه دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است که عتدا هم بحرانی است.

روش فیلترینگ

روشن کار به این صورت است که نقاط را فیلتر کرده و فقط نقاط بحرانی را بدست می آوریم. این نقاط را در یک جدول صلیبی قرار داده و مقدار تابع را در هر کدام بدست می آوریم. بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق و کمترین مقدار را به عنوان مینیمم مطلق تابع اعلام می کنیم (تامااا!)

توجه مقادیر اکسترمم مطلق برای یک تابع منحصربه فرد است، اما میتواند در بیشمار نقطه این اتفاق بیفتد

T ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = |2x|(x-3)$ در بازه $[-1, 3]$ به ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟ (۱) صفر، $4/5$ (۲) $4/5$ ، -4 (۳) صفر، -8 (۴) صفر، $4/5$

A (فیلترینگ نقاط...)

T محل تلاقی مجانب های تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$ ، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{3}{4}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟ (۱) ۳ (۲) -3 (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$ (ریاضی دافل ۱۳۰۱)

A (مفصوله رشته ریاضی)



بهینه‌سازی یا optimization

یعنی پیدا کردن بهترین حالت، مثل کمترین مقدار برای زمان، هزینه، فاصله یا بیشترین مقدار برای سود مسافت یا مهم مسائل بهینه‌سازی معمولا با بیان فارسی و کلمات کمترین یا بیشترین همراهند

روش حل مسائل بهینه‌سازی با استفاده از رمز **ثقتم!!**

۱ **ن** : نمادگذاری رسم شکل (در صورت نیاز) و قرار دادن معلوماها و نمادهای مجهولات X و Y

۲ **ف** : ضابطه‌ی تابعی که قرار است بهینه شود را بنویسید

۳ **ت** : تک‌متغیرش کن! که f دو متغیره بود، تک‌متغیرش کن! (با استفاده از به رابطه از دل سوال!)

۴ **م** : عرض اکسترمم (حالا یا ماکزیمم یا مینیمم) تابع تک‌متغیره رو درست ییارا

T می‌خواهیم دور تا دور یک قاب مستطیلی شکل را با نواری تزئینی به طول ۱۶ بپوشانیم. اگر مساحت مستطیل ماکزیمم باشد، طول قطر مستطیل چقدر است؟ $2\sqrt{2}$ (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) ✓ 4 (۳) 8 (۴)

A با رمز «ثقتم» کار درمیار! :

T ورق فلزی مربعی شکل به طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر در دست است. از چهار گوشه آن مربع‌هایی به کدام ضلع را ببریم تا پس از تا زدن آنها یک جعبه فلزی با حجم ماکزیمم داشته باشیم؟ 3 (۱) 4 (۲) ✓ 5 (۳) 6 (۴)

A شکلتو درست رسم کن...

T زاویه بین ساق و قاعده یک دوزنقه متساوی الساقین 30° و محیطش ۵۰ سانتی متر است. اگر مساحت اگر مساحت ماکزیمم باشد، طول ساق آن چقدر است؟ $25(1)$ $12/5(2)$ $7/5(3)$ $15(4)$

A تو همین حل مسئله به عددای پرت که بر فوررد کردی کیوآپ نکن زود!

T داخل کره ای به شعاع ۳ واحد، مخروطی با حجم ماکزیمم محاط می کنیم. ارتفاع مخروط کدام است؟ $2(1)$ $3(2)$ $4(3)$ $5(4)$

A اون «ن» تو «نقتم» فیلی مومه...

T از بین مخروط های حاصل که از دوران کامل پاره خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است). $6(1)$ $3(2)$ $2\sqrt{3}(3)$ $\sqrt{3}(4)$ (تجربی داهل ۱۳۰۱)

A

T دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x-2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟ $1/9(2)$ $2/9(1)$ $3/9(3)$ $11/9(4)$

A

T کمترین فاصله نقطه واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟
 (ریاضی دافل ۱۳۰۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ (۲) ✓ $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۳) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ (۴) (ریاضی دافل ۱۳۰۲)

A

T در ساخت قوطی های حلبی درپاز به شکل مکعب مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟
 (تهری ۱۳۰۱) 14 (۱) 12 (۲) ✓ 10 (۳) 8 (۴)

A

جهت تقعر اگر بخواهیم پی ببریم که جهت تقعر تابع f در چه بازه ای رو به بالا یا روبه پایین است کافیست f'' را تعیین علامت کنیم

۱ در فواصلی که $f'' > 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.

۲ در فواصلی که $f'' < 0$ است، جهت تقعر رو به بالا است.

کاربرد مشتق

۱ یکنوایی توابع

۲ نقاط اکسترمم (نسبی و مطلق) + نقاط بحرانی

۳ بهینه سازی

۴ جهت تقعر و نقطه عطف مفروض رشته ریاضی

مثال تابع $y = \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x}$ در بازه (a, b) صعودی و تقعرش رو به بالاست. ماکزیم مقدار $b-a$ ؟

سایت رسمی انتشارات فولیتو

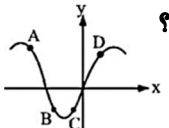
مثال تابع $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 3$ در بازه (a, b) نزولی و تقعرش رو به بالاست. $\log_2(b-a)$ ؟

سایت رسمی انتشارات فولیتو

T به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تقعر منحنی به معادله $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالا است؟
 $-1 < a < 1$ (۱) $-1 < a < 2$ (۲) $-2 < a < 1$ (۳) $-2 < a < 2$ (۴)

A

T در کدام نقطه از نمودار شکل زیر، مقادیر f' ، f'' هر دو مثبت می باشد؟



D (۴) C (۳) B (۲) A (۱)

A

روش بدست آوردن عطف

از آفر به اول میرویم ابتدا اف زکون را تعیین علامت میکنیم نقاطی که در آنها تغییر علامت داشت می شوند کاندیداهای عطف. هر کاندیدایی که دو شرط قبلی را داشت میشود نقطه عطف.
مثال در هر مثال زیر نقطه یا نقاط عطف تابع را بدست آورید.

$$1) y = x^3 - 2x^2 + x - 6$$

$$2) y = \sqrt[3]{x-1}$$

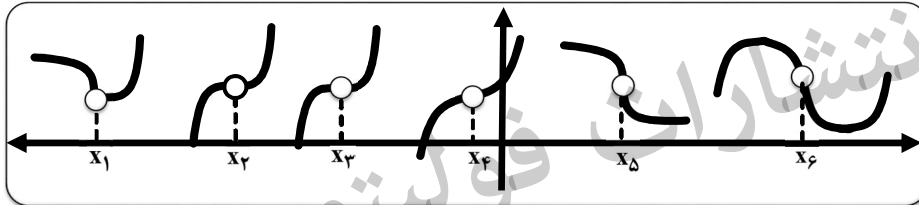
نقطه عطف

نقطه ای از دامنه تابع که جهت تغییر در آن عوض می شود. هر نقطه ای که جهت تغییر در آن عوض می شود صرفاً عطف نیست، برای عطف شدن ۳ شرط لازمه:

- ۱) عضو دامنه تابع باشد
- ۲) خط مماس در آنجا موجود باشد
- ۳) جهت تغییر در آن عوض شود

۳ مدل

نقطه عطف داریم: عطف افقی، عطف قائم و عطف مایل



T اگر $A(1, 2)$ نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$ باشد، طول نقطه عطف آن کدام است؟

- ۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) فاقد نقطه عطف ✓

A

ریاضیت با من