

مفهوم مشتق مشتق تابع در a همان شیب خط مماس بر نمودار تابع در a می‌باشد.

تعریف زکمرش

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$x - a = h \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

توجه تمام موارد تعریف مشتق دارای ابهام صفر صفرم هستند و با هوییتال رفع ابهام می‌شوند.

پیش‌نیازها: زیرصفر + توان‌های گویا + ... + معادله و نامعادله + تابع + مثلثات + ...

مشتق

رشته ریاضی (۳) رشته تجربی (۳)

بودجه‌بندی این فصل در کنکور؟

T اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{x^2+1} \right)$ باشد، آنگاه $f'(\sqrt{5})$ کدام است؟

$\frac{1}{4}(4)$ $\frac{1}{4}(3)$ $\frac{3}{4}(2\checkmark)$ $\frac{3}{4}(1)$

A

T خط گذرا بر دو نقطه $(1, 2)$ ، $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ در نقطه $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3-x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟ (ارج ۹۲)

$5(4)$ $4(3)$ $3(2\checkmark)$ $2(1)$

A

T شکل مقابل، نمایش تابع $f(x)$ است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -\frac{2}{3}$ ، آنگاه نمودار تابع f محور x ها را در سمت راست مبدأ مختصات با کدام طول قطع می‌کند؟

$4(4)$ $\frac{4}{9}(3)$ $2(2\checkmark)$ $\frac{1}{9}(1)$

A

T برای تابع f که در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است، داریم $f'(1) = \frac{1}{8}$. در این صورت حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}(4)$ $\frac{1}{8}(3)$ $\frac{1}{4}(2\checkmark)$ $\frac{1}{32}(1)$

A

به قلم و روش بهنام سرهنگی

T شیب نیم مماس چپ برای تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x+1|\sqrt{3-x}}{(x-1)^2}$ در نقطه ای به طول ۱- روی تابع کدام است؟ $\frac{1}{3}(1)$ $-\frac{1}{4}(2)$ $1(3)$ $-1(4)$

A

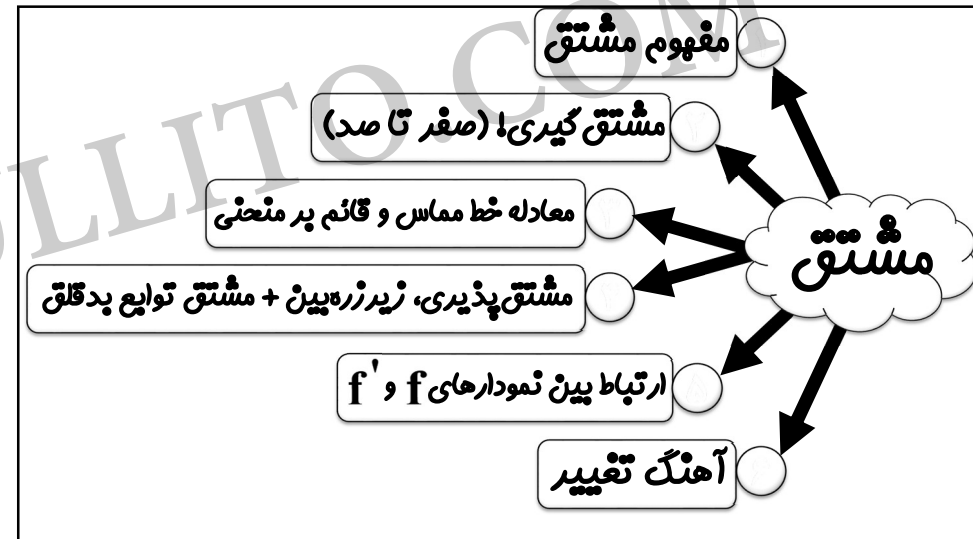
شیب نیم‌مماس راست

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شیب نیم‌مماس چپ

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

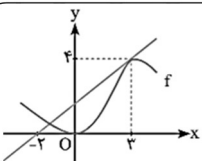
$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$


T مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+3} & x > 3 \\ 6-x & x \leq 3 \end{cases}$ در نقطه ای به طول ۳ روی تابع کدام است؟ $1(4)$ $\frac{1}{3}(3)$ $-1(2)$ $-\frac{1}{3}(1)$

A

به قلم و روش بهنام سرهنگی

T شکل زیر، نمودار تابع $f(x)$ را نمایش می‌دهد. اگر $g(x) = \frac{x^2+1}{f(x)}$ باشد، آنگاه حاصل $g'(3) + f'(0)$ کدام است؟ ☒ ۱(۱) ☐ ۲(۲) ☐ -۱(۳) ☐ -۲(۴)



A

مشتق‌گیری! (صفر تا صد) چند فرمول مشتق‌گیری مشتی ببینیم صفا کنیم!

☐ $y=a (a \in \mathbb{R}) \rightarrow y'=0$ ☐ $y=ax \rightarrow y'=a$

☐ $y=a\Delta^n \rightarrow y'=an(\Delta)^{n-1} \cdot \Delta'$ نما در ضرب ضرب همیشه یکی از نما کم همیشه در مشتق پایه ضرب همیشه

ex $y = \frac{-2}{x^4}$ **ex** $y = \frac{1}{\Delta} (-\Delta x)^{12}$

☐ $y=f \pm g \pm \dots \rightarrow y'=f' \pm g' \pm \dots$ ☐ $y=f \cdot g \rightarrow y'=f' \cdot g + g' \cdot f$

ex $y = \frac{6}{x^3} - x^2 \sqrt[3]{x} + 4x$

T اگر ضابطه مشتق تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ را به صورت $y' = -\frac{1}{x} f(x)$ نوشته باشیم، ضابطه $f(x)$ کدام خواهد بود؟ ☒ $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ☐ $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ☐ $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ ☐ $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

A

☐ $y=\sqrt{\Delta} \rightarrow y'=\frac{\Delta'}{2\sqrt{\Delta}}$ ☐ $y=\frac{f}{g} \rightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$

ex $y = \frac{(2x-1)\sqrt{x}}{x^2}$

☐ $y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ ☐ $y = \frac{1}{U} \rightarrow y' = \frac{-U'}{U^2}$

ex if $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2+3x}\right)^2 \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = ?$

T اگر $f(x) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ ، آنگاه حاصل $f(x) + (x-1)f'(x)$ کدام است؟

$16x^{15}(4)$ ✓ $1(3)$ $8x^7(2)$ $64x^{63}(1)$

A

مشتق‌گیری در حضور سقه سیاه فقط از عامل صفرساز مشتق بگیرا بقیه عوامل جایگزاری!

$$y = \frac{\Delta \cdot f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\Delta(a)=0} y(a) = \frac{\Delta'(a) \cdot f(a)}{g(a)}$$

T اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow -1} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

$-6(1)$ ✓ $-3(2)$ $-\frac{3}{2}(3)$ $-\frac{3}{4}(4)$ (کنکور ۹۲)

A

T اگر $g(x) = \frac{140}{\sqrt[3]{x^2}}$ ، $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $f''g + f'g'$ در $x=1$ کدام است؟

$-11/9(4)$ $-11/8(3)$ $11/9(2)$ $11/8(1)$ ✓

A

توجه همیشه قبل از مشتق‌گیری اگر راه دارد، اول ظاهر تابع را ساده کنیدا

T شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{2x^2+16x}$ در نقطه $x=-1$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}(4)$ $\frac{1}{4}(3)$ $-\frac{1}{2}(2)$ ✓ $\frac{1}{2}(1)$

A

به قلم و روش بهنام سرهنگی

T اگر $f(x) = |1-x^2|[x-2]$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

A

T اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} + [x]$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ ✓ (۴) $\frac{5}{2}$

A

مشتق تابع مرکب بتوانید؛ مشتق داخلش در اف پریم داخلش! تمام؛

$y = f(\Delta) \longrightarrow y = \Delta' \cdot f'(\Delta)$

T اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}[x]$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ کدام است؟ (فاز ۹۷)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$ ✓

A

T فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$ مقدار $a+b$ کدام است؟ (ریاضی دافل ۱۴۰۰)

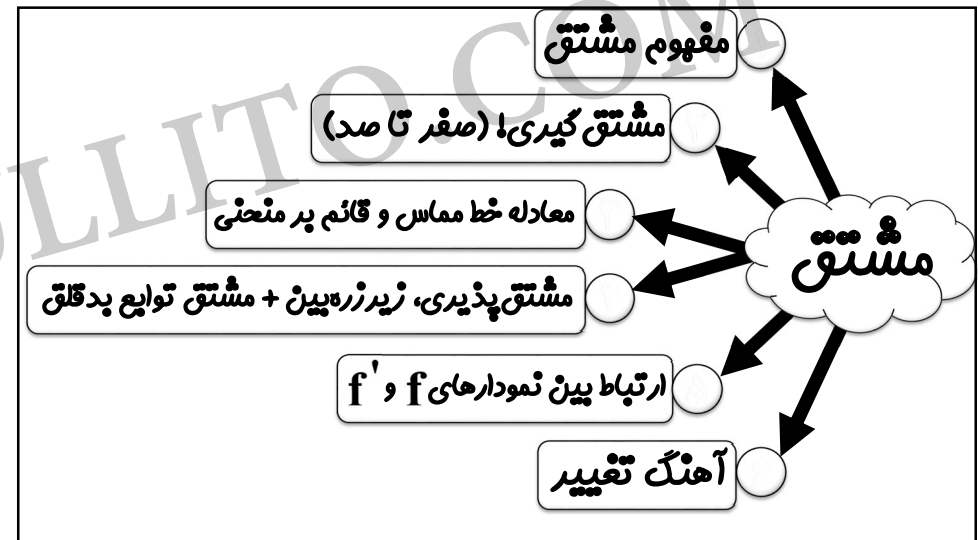
۸ (۱) ۶ (۲) ✓ ۴ (۳) -۸ (۴)

A

T اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x|^3}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟ (تهری دافل ۱۴۰۲)

-۱ (۴) ۱ (۳) ✓ $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۱)

A



T اگر $f(x) = x^5 + \sqrt{x^{10} + 3x^2}$ ، حاصل $f'(x)f(-x) - f'(-x)f(x)$ کدام است؟

$6x^2$ (۴) $6x$ (۳) ✓ $3x^2$ (۲) صفر (۱)

A

T خط مماس بر سهمی $y = 3x^2 - 5x + 1$ در کدام نقطه از آن موازی با خط $y + 2x = 3$ است؟
 (۱) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ (۲) $(\frac{-1}{2}, \frac{17}{4})$ (۳) $(\frac{-1}{2}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

A

T شیب نیم مماس راست بر منحنی تابع $y = \frac{|1-x^2|\sqrt{2-x}}{x^2+1}$ در نقطه‌ای به طول ۱- کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $-\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $-2\sqrt{3}$

A

معادله خط مماس بر منحنی می‌دانیم معادله‌ی یک خط در یک نقطه، با شیب m و مختصات نقطه (x_0, y_0) می‌شود: $y - y_0 = m(x - x_0)$

نقطه $\rightarrow y = f(x) \xrightarrow{x=a} y = f(a)$
شیب $\rightarrow y = f(x) \rightarrow m = f'(a)$

معادله خط قائم بر منحنی خط قائم در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.

نقطه $\rightarrow y = f(x) \xrightarrow{x=a} y = f(a)$
شیب $\rightarrow y = f(x) \rightarrow m = \frac{-1}{f'(a)}$

T خط مماس بر منحنی نمایش تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ در نقطه تقاطع با محور x ها، با محورهای مختصات مثلثی با کدام مساحت را می‌سازد؟
 (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

A

T اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟ (تپیری خارج ۱۳۰۱)

۱(۴ $\frac{2}{3}$ (۳ ✓ $\frac{1}{4}$ (۲ ۰(۱

A

T خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط برهم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی داهل ۱۴۰۲)

۱/۲۵(۱ ✓ ۳/۲۵(۲ ۰/۷۵(۳ ۲/۷۵(۴

A

T یکی از خطوط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ بر خط به معادله $2y + 14x = 9$ عمود است. طول نقطه تماس کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۵(۴ ۴(۳ ۳(۲ ✓ ۲(۱

A

T خط $y = 2x - 3$ بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول (۱-) مماس است. هرگاه $g(x) = f(x^2 - 3x + 1)$ باشد، آنگاه معادله خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

$y + 2x + 1 = 0$ (۴ $y + 2x = -1$ (۳ $y = 2x - 9$ (۲ ✓ $y = 2x + 9$ (۱

A

توجه شرط لازم برای وجود مشتق راست/چپ (شیب نیم‌مماس راست/چپ) این است که تابع در آن نقطه از راست/چپ پیوسته باشد.

کلاً مواست باشه از نقطه توفالی نه میشه مماس رسم کرد، نه نیم‌مماس!

توجه یکی از مهم‌ترین کاندهای مشتق ناپذیری، نقاط مرزی در توابع چندضابطه‌ای هستن.

مشتق

- مفهوم مشتق
- مشتق‌گیری! (صفر تا صد)
- معادله خط مماس و قائم بر منحنی
- مشتق‌پذیری، زیررهبین + مشتق توابع بدقلق
- ارتباط بین نمودارهای f و f'
- آهنگ تغییر

T تابع f با نمودار مقابل، در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۴(۱) ۵(۲) ✓ ۶(۳) ۷(۴)

A

شرط مشتق‌پذیری f در $x = a$ زمانی یک تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است که بتوان در آن نقطه بر نمودارش یک خط مماس غیر قائم رسم کرد! (مماس ی تیکه!)

مشکل؟ مشکل؟ مشکل؟ Ok:)

پس شرط مشتق‌پذیری f در a می‌شود:

☐ باید تابع در این نقطه پیوسته باشد. ☐ باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

مشتق پذیری توابع رادیکالی دو نکته زیر را در مورد توابع رادیکالی در نظر بگیرید:

نکته اول رادیکال با فرجه زوج دیردامنه اش را بیابید در نقاط سر و ته دامنه ناپوسته و مشتق ناپذیرند

نکته دوم در تمام توابع $\sqrt[n]{\Delta^m}$ که در آنها $m > n$ است در ریشه(های) Δ مشتق ناپذیرند (پهرا)

ex $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

T تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{3x + b}$ در $x = -\frac{2}{3}$ مشتق ناپذیر است. در این صورت b کدام است؟

۱(۱) ✓ ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) -۳(۴)

T تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+a}{x-1} & x \geq 2 \\ x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases}$ روی R مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

۱(۱) ✓ ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) -۳(۴) -۱۱(۳)

A

T تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| < 2 \\ 4x - 1 & |x| \geq 2 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) ✓

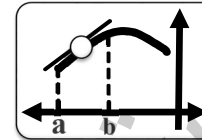
A

T فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$ اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱(۱) ✓ -۱۵(۱) -۵(۲) ۵(۳) ۱۵(۴) (تجربی خارج ۱۴۰۰)

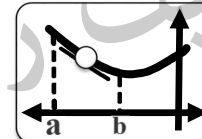
A

علامت مشتق



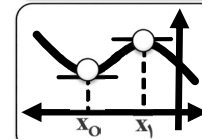
اگر در یک بازه تابع f صعودی آید باشد، در آن بازه علامت مشتق مثبت است.

$$f' > 0$$



اگر در یک بازه تابع f نزولی آید باشد، در آن بازه علامت مشتق منفی است.

$$f' < 0$$



در قله یا قعر نمودار تابع، خط مماس افقی و در نتیجه مقدار مشتق آنجا صفر است.

$$f' = 0$$

T	تابع $y = [2x]$ روی بازه $(-1, 4)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟			
	۵(۱)	۸(۲)	۹(۳) ✓	۱۰(۴)
A				

مفهوم مشتق

مشتق‌گیری! (صفر تا صد)

معادله خط مماس و قائم بر منحنی

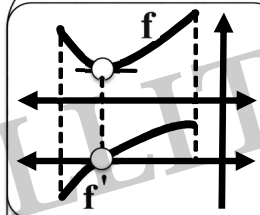
مشتق‌پذیری، زیررهبین + مشتق توابع بدقلق

ارتباط بین نمودارهای f و f'

آهنگ تغییر

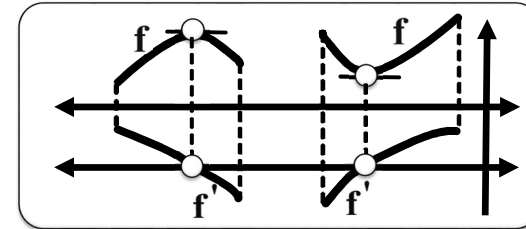
مشتق

ارتباط بین نمودارهای f و f'



در بازه‌ی نمودار آید صعودی است ← نمودار بالای محور هاست

در بازه‌ی نمودار آید نزولی است ← نمودار زیر محور هاست



قله یا دره در نمودار

T نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. نمودار f' شبیه کدام گزینه است؟

(1)

(2)

(3)

(4)

A

T نمودار f ، مطابق شکل روبه رو داده شده، نمودار f' کدام است؟

(1)

(2)

(3)

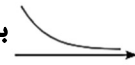
(4)


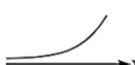


A

نقطه گوشه‌ای در نمودار

عطف قائم در نمودار

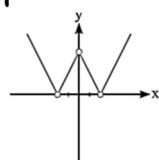
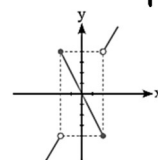
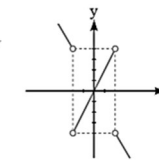
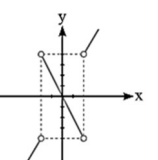
نقطه بازگشتی در نمودار

T اگر نمودار تابع f به صورت  باشد، کدام گزینه نمودار مشتق تابع f را به درستی نمایش می‌دهد؟

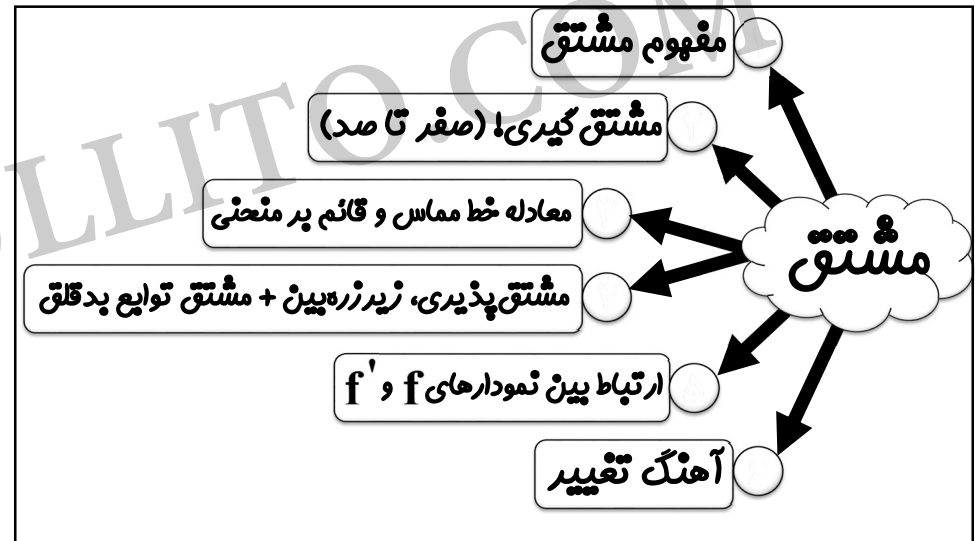
(۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

A

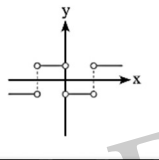
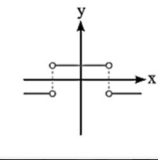
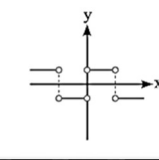
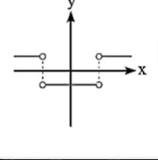
T نمودار مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ کدام شکل است؟ (کتاب درسی)

(۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

A



T نمودار مشتق تابع با ضابطه $h(x) = ||x| - 2|$ چگونه است؟

(۱)  (۲)  (۳)  (۴) 

A

به قلم و روش بهنام سرهنگی

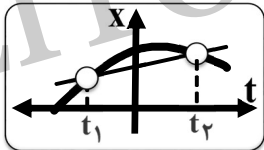
توجه اگر گفتند آهنگ تغییر متوسط تابع f در نقطه‌ی $x = a$ به ازای نمو Δx ، در واقع بازه‌ای که باید در آن آهنگ تغییر متوسط را محاسبه کنیم، بازه‌ی $[a, a + \Delta x]$ است.

T در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x=1$ با نمو $\frac{1}{6}$ از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه چقدر کمتر است؟ (شارج ۹۳)

$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

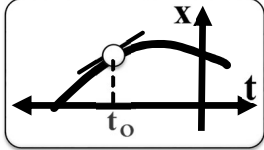
A

سرعت متوسط می‌دانیم (ایشالا!) که سرعت متوسط می‌شود نسبت جابجایی به زمان. پس در اینجا با تابع $(y = x(t))$ و نمودار مکان بر حسب زمان سروکار داریم!



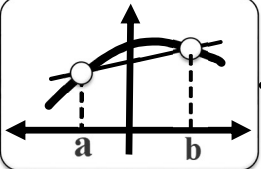
$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

سرعت لحظه‌ای باید بدانید که تابع سرعت، مشتق تابع مکان-زمان است!



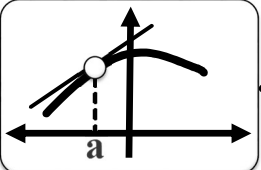
$v(t_0) = x'(t_0)$

آهنگ تغییر متوسط آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ همان شیب خط واصل نقاط سروته بازه است!



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x = a$ همان شیب خط مماس بر نمودارش در a است.



$f'(a)$

T در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x=4$ تا $x=12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$ چقدر بیشتر است؟ (کنکور ۹۳)

$\frac{1}{540}, \frac{1}{270}, \frac{1}{540}, \frac{1}{270}$

A

به قلم و روش بهنام سرهنکی

T اگر ضلع مکعبی از ۴ به $\frac{4}{1}$ میلی متر برسد، آهنگ متوسط تغییر حجم مکعب به ازای هر میلی‌متر مکعب چقدر است؟ $\frac{49}{21}(1)$ ✓ $\frac{4}{921}(2)$ $\frac{0}{4921}(3)$ $\frac{0}{04921}(4)$

A

T نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. بزرگ‌ترین مقدار در کدام گزینه آمده است؟

A: سرعت متوسط در بازه $[1, 3]$ B: سرعت متوسط در بازه $[5, 6]$

C: سرعت لحظه‌ای در $t=1$ D: سرعت لحظه‌ای در $t=6$

A(1) B(2) C(3) ✓ D(4) (کتاب درسی)

A

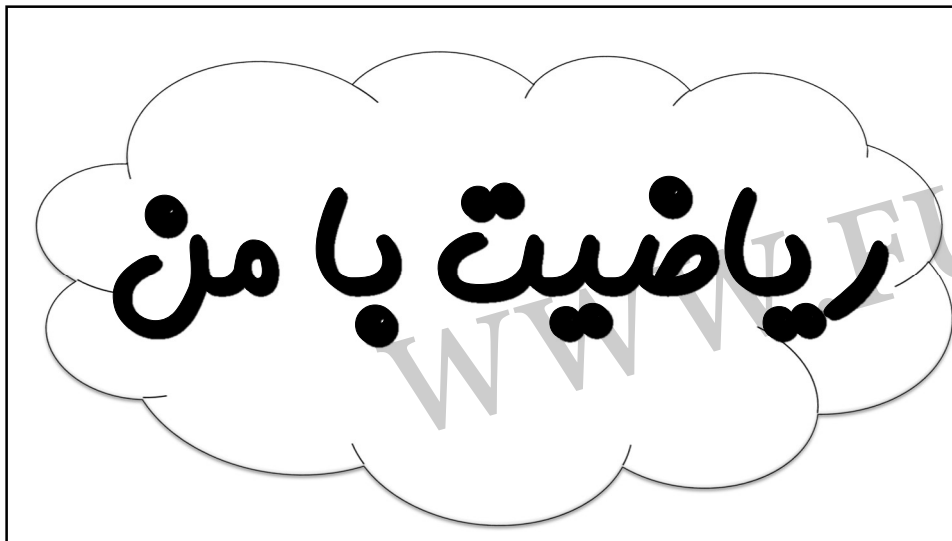
T آهنگ تغییر متوسط برای تابع $f(x) = x^2 - 4x + 1$ در کدام بازه صفر است؟ $[0, 2](1)$ $[1/5, 2/5](2)$ $[2, 4](3)$ $[1/5, 2/5](4)$ ✓

A

T خودرویی در امتداد یک خط مستقیم طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند که در آن $0 \leq t \leq 5$ بر حسب ثانیه است. سرعت متوسط این خودرو در کدام بازه به سرعت آن در لحظه $t=1$ s نزدیک‌تر است؟ (کتاب درسی) $[1, 1/3](1)$ $[1, 1/2](2)$ $[1, 1/3](3)$ $[1, 1/2](4)$ ✓

A

<p>T در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos^2 x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱) ✓</p> <p> $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) ۱ (۲) -1 (۱) </p>
<p>A</p>



به قلم و روش بهنام سرهنگی