

معادله درجه ۲ و روش های حلش


۱ دو دیوانه

۱) $ax^2 + bx + c = 0$ & $a + b + c = 0 \rightarrow x = 1$ & $x = \frac{c}{a}$

۲) $ax^2 + bx + c = 0$ & $b = a + c \rightarrow x = -1$ & $x = -\frac{c}{a}$

۳) $-12x^2 + 7x + 5 = 0, x = ? \rightarrow (-12) + 7 + 5 = 0 \rightarrow x = 1$ & $x = -\frac{5}{12}$

۴) $-12x^2 - 7x + 5 = 0 \rightarrow -7 = (-12) + 5 \rightarrow x = -1$ & $x = \frac{5}{12}$

۲ تجزیه 

$-3x^2 + 12x + 63 = 0 \rightarrow -3(x^2 - 4x - 21) = -3(x-7)(x+3) = 0$

۳ روش Δ


$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$ & $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ & $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ **دو ریشه** $\Delta > 0$

$x = \frac{-b}{2a}$ **یک ریشه مضاعف** $\Delta = 0$

$\alpha(x+\beta)^2 = 0$ **فاقد ریشه** $\Delta < 0$

تعداد ریشه‌ها

میانبر Δ'  فقط زمانی که b زوج باشد

$b = 2b'$

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta' = b'^2 - ac$ & $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$

از نظر تعداد ریشه‌ها دقیقاً مثل دلتاست...

$7x^2 - 12x - 4 = 0, x = ? \rightarrow b' = \frac{b}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

$\rightarrow \Delta' = (-6)^2 - (7)(-4) = 64 \rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{64}}{7} = \frac{6 \pm 8}{7} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{7} \end{cases}$

M2 نقشه حل معادلات درجه ۲



دو دیوانه \rightarrow **تجزیه** \rightarrow Δ or Δ'

درجه ۲

T کدام عدد جواب معادله $(\sqrt{7} + 4\sqrt{3})x^2 - \sqrt{3}x = 2$ است؟

$2(2 - \sqrt{3})(4)$ $2(\sqrt{3} - 2)(3)$ $\sqrt{3} - 2(2)$ $2 - \sqrt{3}(1)$

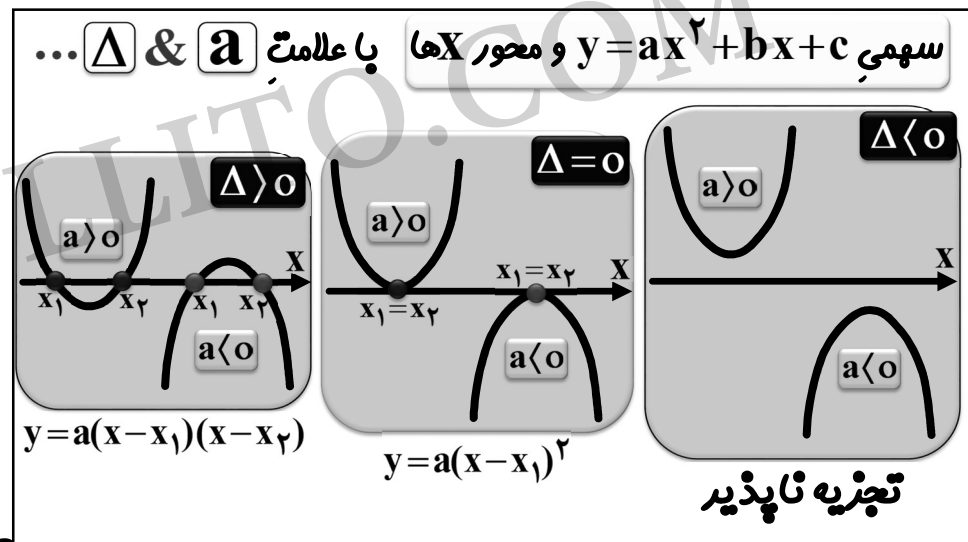
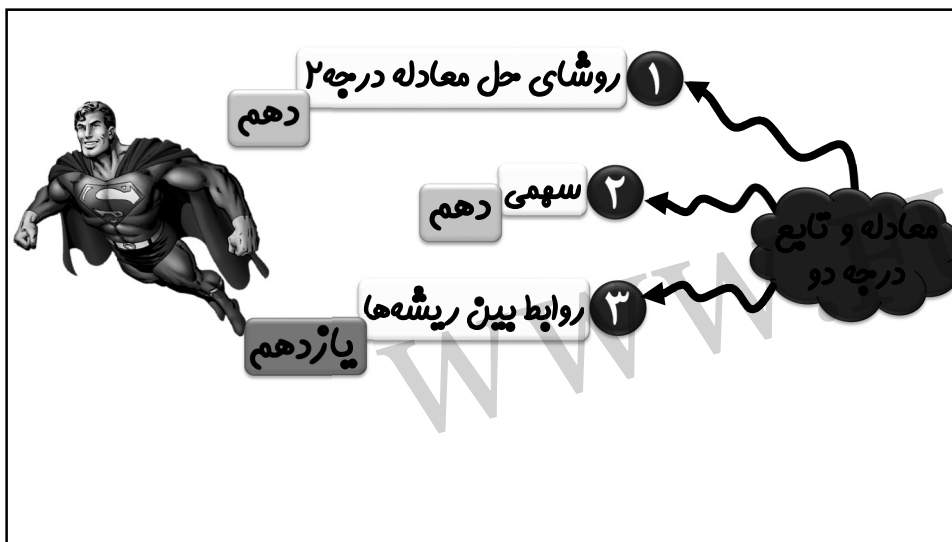
A

T اگر معادله درجه دوم $mx^2 - mx + 2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، m در کدام بازه قرار می گیرد؟
 (۰, ۸) (۴, ۸) (۳, ۴) (۲, ۸) (۱, ۸)

A

T به ازای چه مجموعه مقادیری از k ، معادله $(x+2)(x^2+kx+k+3)=0$ ، سه ریشه حقیقی متمایز دارد؟
 (۲) $(-\infty, -2) \cup \{7\}$ $-2 < k < 6$
 (۴) $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty) \cup \{7\}$ $k < -2 \text{ or } k > 6$

A



مجموعه مقادیر k که به ازای آنها سهمی زیر همواره زیر محور ایکس قرار گیرد؟

$$y = (k^2)x^2 + (k-1)x - 1$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر k سهمی $y = (k-1)x^2 - kx + 1$ هیچگاه بالای محور x قرار نمی گیرد؟

$$a < 0 \cap \Delta \leq 0 \rightarrow k-1 < 0 \rightarrow \boxed{k < 1} \text{ \& } \Delta = (-k)^2 - 4(k-1)(-1) \leq 0$$

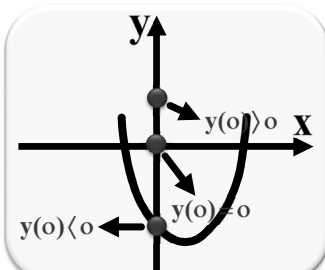
$$\Delta = k^2 - 4k + 4 \leq 0 \rightarrow \Delta = (k-2)^2 \leq 0 \rightarrow \begin{cases} (k-2)^2 < 0 \rightarrow \otimes \\ (k-2)^2 = 0 \rightarrow k=2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1} k=2 \otimes$$

T به ازای کدام مقادیر a ، سهمی به معادله $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورها مختصات نمی گذرد؟
 $-2 \leq a < 0$ (4) $a > 0$ (3) $a > -2$ (2) $a \leq -2$ (1) ✓

A

دو نقطه فوق مهم در سهمی



1
 ◀ محل برخورد سهمی است با محور y ها!
 ◀ کافیست به جای x قرار بدهی صفر! (همون c در فرم گسترده $y = ax^2 + bx + c$ یعنی $y(0)$)

$$y = -2x^2 + 5x + 6 \rightarrow y(0) = -2(0)^2 + 5(0) + 6 = 6$$

$$y = 2(x-1)^2 - 5x - 3 \rightarrow y(0) = 2(0-1)^2 - 5(0) - 3 = -1$$

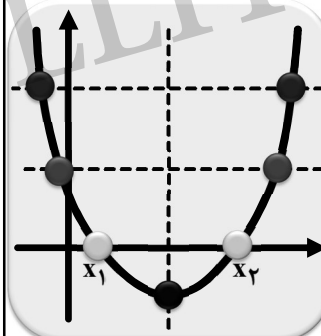
$$y = ax^2 + bx + c$$

2
 ◀ نقطه ی روی قله ($a < 0$) یا قعر ($a > 0$) سهمی است.

◀ طول آن $(x = -\frac{b}{2a})$ و عرض آن $(y(-\frac{b}{2a}))$ است.

در فرم مربع کامل شده سهمی طول راسش همان ریشه دافل پراتر است.

! طول راس، میانگین طول هر دو نقطه هم عرضه!



T فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 1)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند.

این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

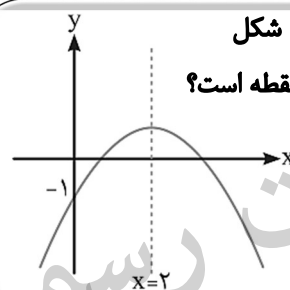
تجربی داخل ۹۹

☒ $(-1, 3)$ ☐ $(-1, 4)$ ☐ $(2, 9)$ ☐ $(2, 15)$ ☐ $(4, 15)$

A

T نمودار سهمی $y = -2(x + 3m - 5)^2 + m + 2n$ مطابق شکل

مقابل است. رأس سهمی به معادله $y = mx^2 + nx + 1$ کدام نقطه است؟



☐ $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ ☐ $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$
☐ $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$ ☐ $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

A

$$x_s = -3m + 5 = 2 \rightarrow m = 1 \rightarrow y = -2(x - 2)^2 + 1 + 2n$$

$$y(0) = -1 \rightarrow -2(0 - 2)^2 + 1 + 2n = -1 \rightarrow n = 3$$

$$y = x^2 + 3x + 1 \rightarrow x_s = -\frac{3}{2} \rightarrow y_s = y(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$$

T رأس سهمی به معادله $y = x^2 + mx - \frac{1}{4}$ ، روی نیمساز ناحیه اول و سوم محورهای مختصات

واقع است. اگر این سهمی محور xها را در نقاط A و B قطع کند، طول پاره خط AB کدام است؟

☒ $\sqrt{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ ۱ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ $\frac{1}{4}$

A

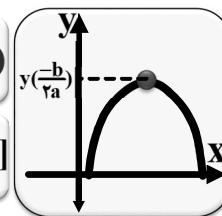
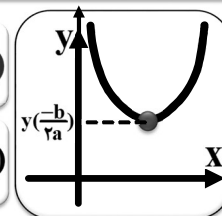
ماکزیمم، مینیمم و برد سهمی

if $a > 0 \rightarrow \dots \rightarrow \min \text{ مقدار} = y(\frac{-b}{2a})$

if $a > 0 \rightarrow \dots \rightarrow R = [y(\frac{-b}{2a}), +\infty)$

if $a < 0 \rightarrow \dots \rightarrow \max \text{ مقدار} = y(\frac{-b}{2a})$

if $a < 0 \rightarrow \dots \rightarrow R = (-\infty, y(\frac{-b}{2a})]$



T اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (K+3)x^2 - 4x + K$ برابر صفر باشد، مقدار

K کدام است؟ ☒ ۱) -۴ ☐ ۲) -۱ ☐ ۳) ۱ ☐ ۴) ۴

A

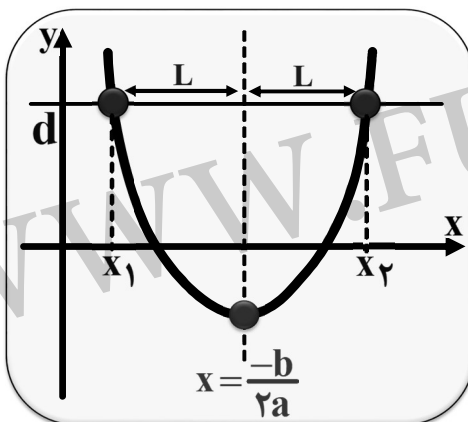
T نمودار تابع یک سهمی از نقاط $(3, 4)$ ، $(4, 3)$ عبور می کند. اگر نمودار این تابع محور yها

را در نقطه ای به عرض -۵ قطع کند، برد این تابع برابر کدام است؟

۱) $(-\infty, 4]$ ☒ ۲) $(-\infty, 4]$ ☐ ۳) $(3, +\infty]$ ☐ ۴) $(-\infty, 3]$ ☐

A

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$



طول که این فاصله در آن بنا شده، میانگین طول هر دو نقطه هم عرض روی سهمی است.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

محور تقارن سهمی به معادله $y = -x^2 + (m-1)x + n$ از نقطه $(-2, 5)$ میگذرد. اگر این

سهمی بر محور xها مماس باشد، mn کدام است؟ ☒ ۱) ۶ ☐ ۲) ۱۲ ☐ ۳) -۶ ☐ ۴) -۱۲

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m-1)}{2(-1)} = -2 \rightarrow m-1 = -4 \rightarrow m = -3 \rightarrow y = -x^2 - 4x + n$$

$$\Delta' = 0 \rightarrow (-2)^2 - (-1)(n) = 0 \rightarrow n = -4 \rightarrow mn = (-3)(-4) = 12$$

نقاط $(-1, -4)$ و $(-3, -4)$ روی سهمی $y = x^2 + ax + b$ قرار دارند. فاصله نقطه برخورد

محور تقارن سهمی و خط $y = -2x - 3$ از مبدأ مقصود کدام است؟ ☒ ۱) ۱ ☐ ۲) ۲ ☐ ۳) ۳ ☐ ۴) ۴

T محور تقارن سهمی های $y = -x^2 - 2x + b$, $y = x^2 + ax - 2$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار b چقدر است؟ (تیربی دی ۱۳۰۱)

۴(۴) ۸(۳) ✓ -۴(۲) -۸(۱)



فرض: $\Delta > 0$

روابط بین ریشه های معادله درجه ۲

$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ ←

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+(-b)-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ ←

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}) \times (-b-\sqrt{\Delta})}{(2a)(2a)}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)(2a)} = \frac{b^2 - \Delta}{(2a)(2a)} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{(4a^2)} = \frac{c}{a}$$

ساخت معادله درجه ۲ با S و P

اینهمه شعبون ییبارم رمضون

اگر ضرب و جمع ریشه های یک معادله درجه ۲ (S & P) داده شده باشد و بخواهیم خود معادله را بنویسیم، داریم:

$S = \alpha + \beta$ & $P = \alpha \cdot \beta \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow$ ریشه هاشن! α & β

proof $(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

T اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1\right\}$ است؟

$4x^2 - 3x - 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 5x - 1 = 0$ (۳) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $4x^2 - 5x + 1 = 0$ (۱)

A

T اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

(از شر رادیکال
غلاصن شوا)

۶ (۴) ۴ (۳) ✓ ۳ (۲) ۲ (۱)

A

روابط معروف بین ریشه ها

if $ax^2 + bx + c = 0$ α & β **then**

۱ $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

۲ $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$

T در معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه ها α و β باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$

چقدر است؟

۲۴ (۴) ۱۶ (۳) ۱۲ (۲) ۴۸ (۱) ✓

A

T ریشه های معادله $ax^2 - 8x + 4 = 0$ است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله ای با ریشه های $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$ برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ ($a > 0$)

۱(۱) ۲(۲)✓ ۳(۳) ۴(۴) (تقریبی دی ۱۴۰۱)

A

T در معادله درجه دوم $mx^2 + (3+m)x + 6 = m^2$ دو ریشه، معکوس یکدیگرند، مجموع ریشه ها کدام است؟ ۱(۱) $\frac{5}{3}$ ۲(۲) $\frac{1}{3}$ ۳(۳) $-\frac{5}{2}$ ۴(۴) ۰

A

تغییر متغیر (کلیک رشتی)

عدد (🐶) + عدد (🐶) + عدد (🐶) = ۰ → عدد (🐶) = t

در آخر جواب ها را چک می کنیم که برامان موشکل ایجاد نکنن کسکم!

$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow{t = \sqrt{x}} t^2 - t - 6 = 0$

$(t+2)(t-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = -2 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ (X)} \\ t = 3 \rightarrow \sqrt{x} = 3 \text{ (✓)} \end{cases} \rightarrow x = 9$

T معادله $(x^2 - x - 1)^2 = 3x^2 - 3x - 5$ چند جواب صحیح دارد؟ ۱(۱) ۲(۲)✓ ۳(۳) ۴(۴) هیچ ریشه صحیحی ندارد.

A

تعداد جواب های معادله $(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 = 1 - x^2 - \sqrt{x}$ کدام است؟			
o(1)	۱(۲✓)	۲(۳)	۳(۴)
A			



WWW.FULLITO.COM