

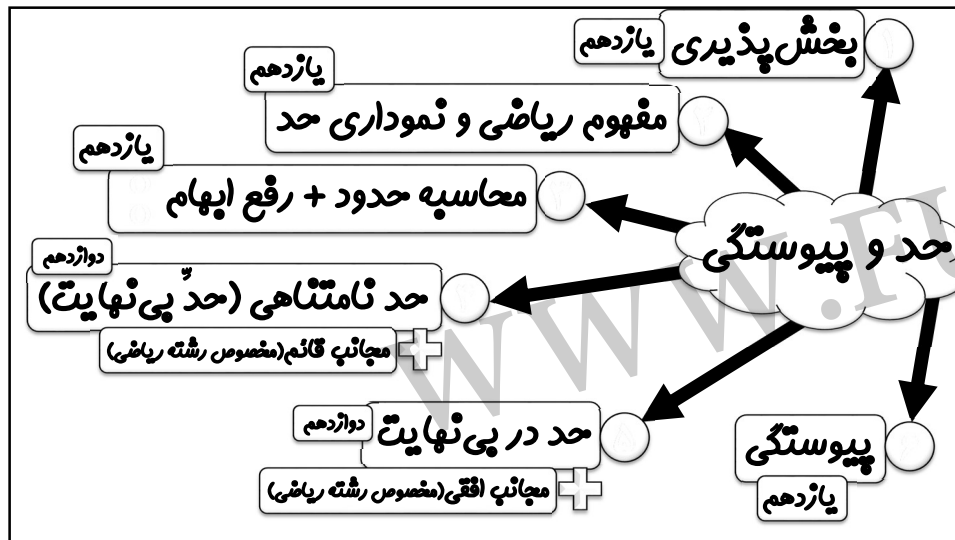
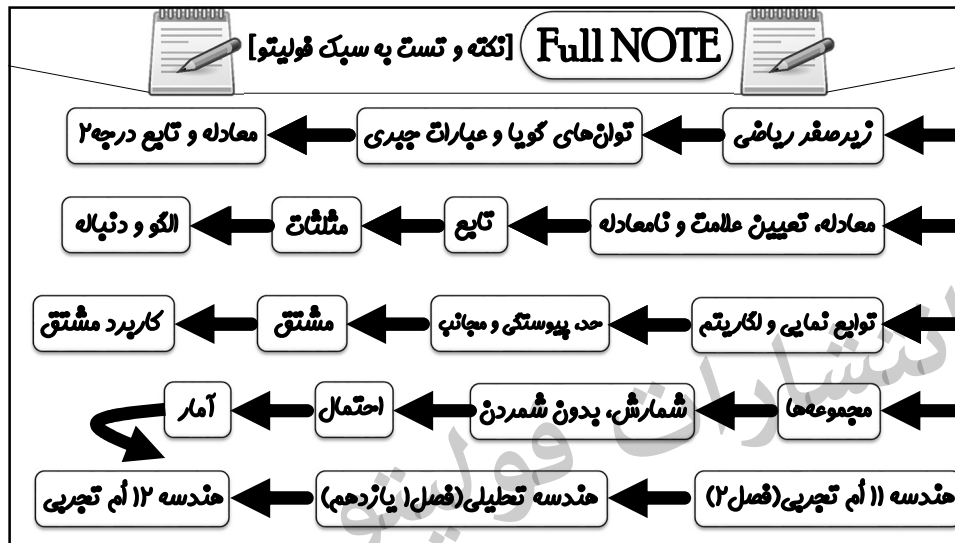
حد، پیوستگی و مجانب

⚠ پیش نیازها: زیر صفر + توان‌های گویا + ... + معادله و نامعادله + تابع + مثلثات

بودجه‌بندی این فصل در کنکور؟

رشته ریاضی (۳ تا ۵)
رشته تجربی (۳ تا ۵)

Limits



بخش پذیری

الگوریتم تقسیم

در تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ داریم:

باقیمانده خارج قسمت مقسوم علیه مقسوم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)} + \frac{r(x)}{r(x)}$$

حد اکثر $n-1$ $n-m$ m n

ex $3x^3 - 2x + 1 \div x^2 + 2$

T باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$, $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می تواند باشد؟ (ریاضی فارغ ۱۴۰۱)

$-x + 2$ (۱) $2x - 1$ (۲) $3x - 2$ (۳) $-2x + 3$ (۴) ✓

A

باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$ $ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \rightarrow r = f(-\frac{b}{a})$

T اگر عبارت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 1$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $2x + 2$ ، برابر -12 باشد، مقدار ab کدام است؟ (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) -20 ✓ (۴) -10

A

T حاصل عبارت $\frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(1+t)}{1-t^{10}}$ به ازای $t = \sqrt[5]{2}$ کدام است؟

-1 (۱) ✓ 1 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴)

A

آشنایی با ۳ اتحاد چقر و پدیدن!!

۱- برای n های زوج و فرد داریم: $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1})$

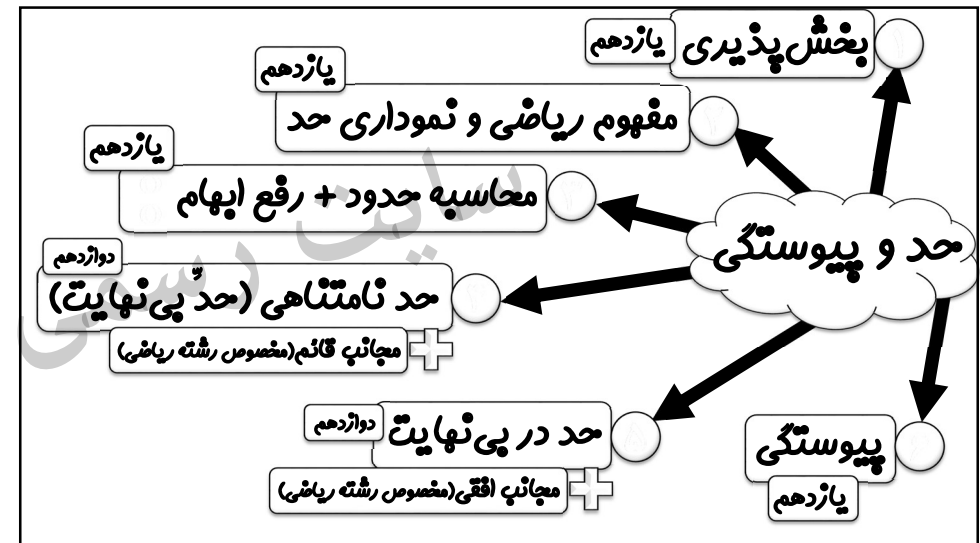
ex $x^5 - 32$ **ex** $x^4 - 1$

۲- برای n های فرد، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-1})$

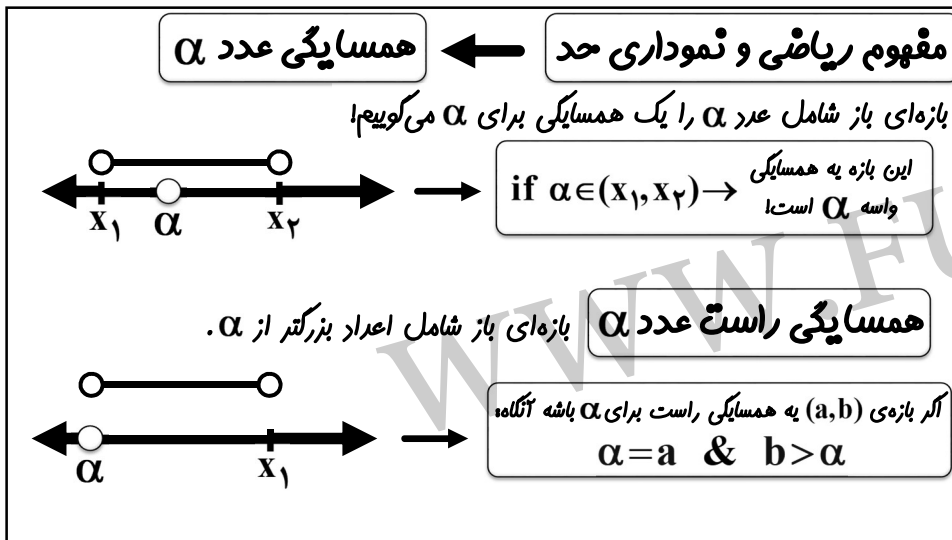
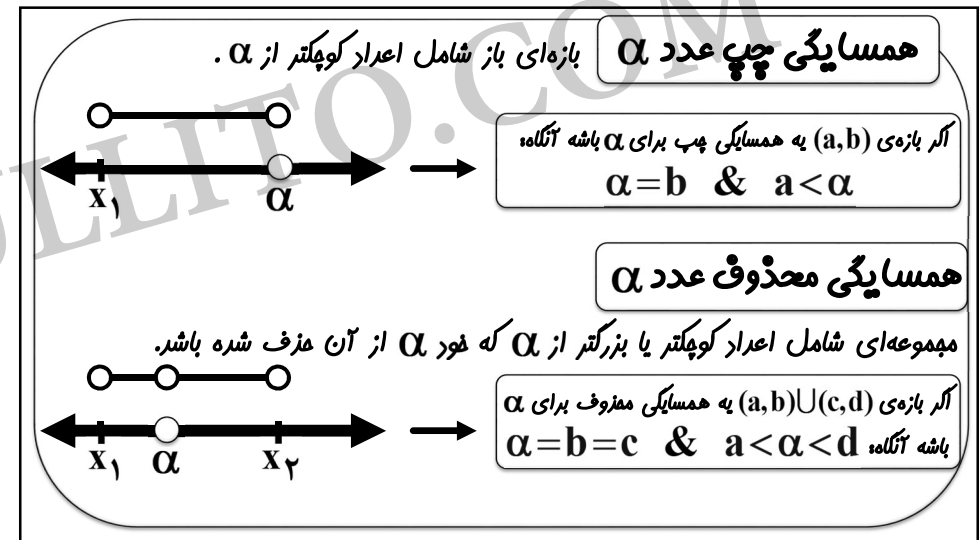
ex $x^5 + 1$

۳- برای n های زوج، با تبدیل $a \rightarrow -a$ داریم: $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1})$

ex $x^4 - 16$



| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <p>T حاصل عبارت $A = \frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ، کدام است؟ (کنکور ۹۳)</p> <p>۲(۱)✓ ۳(۲) ۴(۳) ۵(۴)</p> | <p>A</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|



T کدام گزینه درباره مجموعه جواب نامعادله $\left| \frac{3x-1}{2x+3} \right| < 1$ نادرست است؟

۱) همسایگی محذوف عدد $-\frac{3}{2}$ است
۲) همسایگی راست $-\frac{1}{4}$ است.
۳) همسایگی چپ ۴ است.
۴) همسایگی صفر است.

A

T اگر $(m, 2m-n) \cup (m+2n, p)$ یک همسایگی محذوف برای ۵ باشد، p کدام عدد زیر می تواند باشد؟

۱) n ۲) $2n$ ۳) $m+2n$ ۴) $2m+n$

A

T شکل مقابل، نمودار تابع $f(-x)$ است. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-2x)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۰ ۴) -۲

A

مفهوم حد هر راست تابع f در نقطه‌ی a را با $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ نشان می‌دهند. و مفهومش این است که وقتی x به a نزدیک میشود از مقادیر بیشتر، عرض به L_1 میل میکند هر پیش را هم در این ببینید

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

تابع f در a حد دارد اگر

اولا در یک همسایگی اطراف a تعریف شود.
ثانیا مقادیر هر راست و پیش در a برابر شود.

T شکل زیر، نمودار تابع f را نمایش می دهد. حاصل

کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x+2)$

۴(۱) ۶(۲) ✓ ۵(۳) ۴(۴) حد ندارد.

A

T شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)$ را نمایش می دهد. حاصل

کدام است؟ $\lim_{x \rightarrow -2^+} (f(-x) + f(x-2))$

۰(۱) -۴(۲) ۳(۳) -۱(۴) ✓

A

محاسبه حدود ← اصول اربعه‌ی سرهنگی

Rule No.1

چند جمله‌ای

مثلاثی

نمایی لگاریتمی

رادیکالی

بایکزاری ساده انجام میدیم

اینجا برامون مهم نیست که $x \rightarrow a^+$ ، $x \rightarrow a^-$ یا $x \rightarrow a$! خود a رو بایکزاری میکنیم

توجه وقتی بیای ایکس‌ها قرار میدیم a ، درواقع a نسبی را بایکزاری میکنیم نه a مطلقا

بخش‌پذیری یادهم

یادهم

مفهوم ریاضی و نموداری حد

محاسبه حدود + رفع ابهام

یادهم

حد نامتناهی (حد بی‌نهایت)

دوازدهم

مچانپ قائم (مضموم رشته ریاضی)

حد در بی‌نهایت

دوازدهم

مچانپ افقی (مضموم رشته ریاضی)

پیوستگی

یادهم

Rule No. 2 ← رفتار درست با جز صحیح

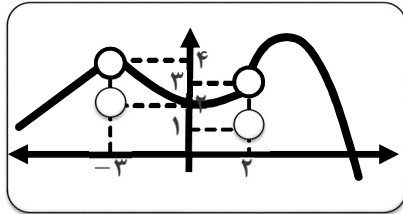
جز صحیح رو به چشم به عدد ببینید یعنی هر جای مر، به برکت دیدی اول اونو تعیین مقدار کن!

اگر داخل برکت صحیح شد، یکبار دیکه با دقت جایگزینی را تکرار کنید
 خود عدد (نه کمتر یا بیشترش) رو جایگزینی کن! بعدش...
 اگر داخل برکت غیر صحیح شد، همان را حساب کنید

ex $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x] + \sin \pi x}{3^{x-2} + [-\frac{x}{3} - 1]}$

ex شکل زیر نمودار تابع f است. با توجه به آن حاصل مر داده شده را بیابید! باتشکرا

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2x \cos((x-1)\pi)}{2^{x-2} + f(-x-1)} = ?$$



Rule No. 3 ← رفتار درست با قدر مطلق

اگه بعد از جایگزینی داخل قدر مطلق صفر شد باید تعیین علامت شورا والسلام!

ex $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x[-x+1]+1}$

Rule No. 4 ← وقتی فقط مخرج صفر میشه..

عدد روی صفر نسبی می شود بی نهایت! اما $+\infty$ یا $-\infty$ برای تعیین علامت بی نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنید! در ایستگاه مر نامتناهی بهت مبسوطی راجع به این قانون خواهیم داشت!

ex $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+2| + [x-1]}{-x^2 + 4x + 5}$

با فرمول عبارات ساده کنید و سق سیاه رو از صورت و مخرج خط بزنید

مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 - \sin 2x}}{\sin x - \cos x}$ کدام است؟

۱(۱) ✓ ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) $+\infty$

A

حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟ (ریاضی داهل ۱۴۰۱)

$-\frac{3}{2}(4) \checkmark$
 $-2(3)$
 $\frac{1}{2}(2)$
 $3(1)$

هم‌ارزی‌های مثلثاتی (Face off!) اگر کمان به صفر میل کرده ابتدا با استفاده از هم‌ارزی‌های زیر

مهره‌ی عبارات مثلثاتی را به عبارات جبری تغییر دهید، بعد با هویتال، تئریه ... ابهام را رفع کنید

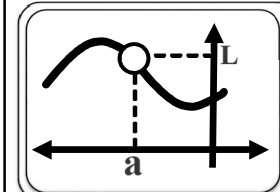
if $\Delta \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^m \Delta \sim \Delta^m \\ \tan^m \Delta \sim \Delta^m \end{cases} \quad \cos^m \Delta \sim 1 - m\left(\frac{\Delta^2}{2}\right)$

ex $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 2x}$

T حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$\frac{\sqrt{2}}{2} (4) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} (3) \checkmark \quad \sqrt{2} (2) \quad -\sqrt{2} (1)$

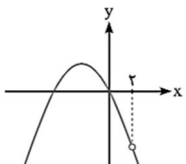
A



حفره در نمودار از این هفره، دو مفهوم مهم استخراج می‌شود:

$x = a$ هم ریشه‌ی صورت تابع است هم ریشه‌ی مخرج آن!

L مقدار مر عبارت است پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$!



T شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^3 + ax + b}{2 - x}$ است.

دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

$(8, 0) (4) \quad (-1, 2) (3) \quad (-8, 0) (2) \checkmark \quad (0, -8) (1)$

T قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = \frac{5 - [-2x]}{3 - 2x} \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

در نقطه $x = \frac{3}{2}$ چقدر است؟ $(1) \quad 17 (2) \checkmark \quad 16 (3) \quad 2 (4)$

A

T حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۱۳۰۱)

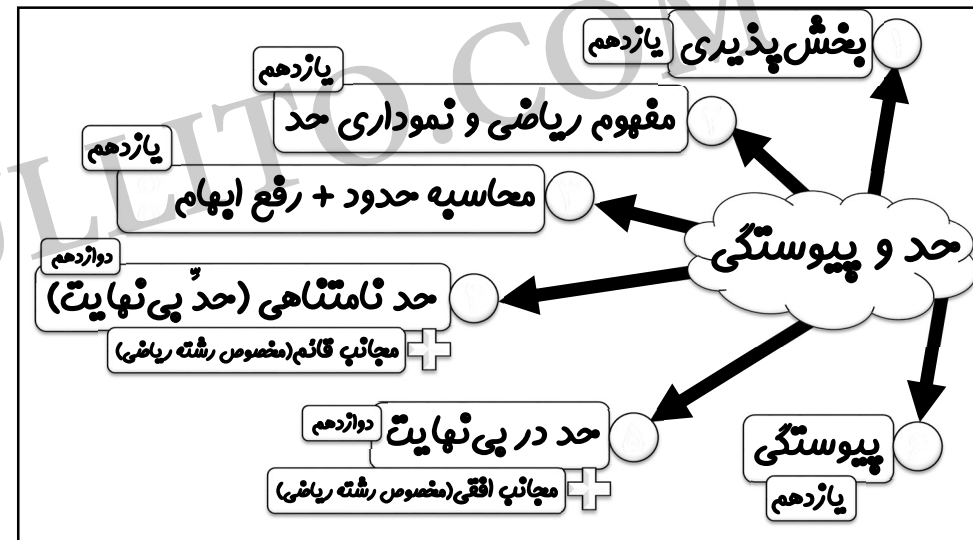
۱(۴✓) $\frac{1}{2}$ (۳) ۰(۲) $-\infty$ (۱)

A

T حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{3}} \left[\frac{12}{\tan^2 x} \right]$ کدام است؟

۱(۴) ۵(۳) ۴(۲✓) ۳(۱)

A



T مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2b}{ax-b}$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۳۰۲)

$\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{48}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲✓) $\frac{1}{12}$ (۱)

A

مثال) اگر در کلاس با شیفت من (ا) مچانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$ را بیابید.

answer

حد نامتناهی (حد بی نهایت)

انفصال ساده

انفصال مضاعف

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

هرکدام از مرور بالا در a ، به هر نامتناهی

خط قائم $x = a$ در هرکدام از نمودارهای بالا یک مچانب قائم برای تابع f می باشد

ریشه های مخرج توابع کسری، معمولا مچانب قائم اند. گفتیم معمولا چون بعد از ماسبه این ریشه ها، باید هر تابع را در آن ها بیابید تا مطمئن شوید جواب هر میشود بی نهایت!

دو عبارت + سوپر مهم!

$1 \pm \sin \Delta \geq 0$
 $1 \pm \cos \Delta \geq 0$

Why?

$-1 \leq \sin \Delta \leq 1$
 $-1 \leq \cos \Delta \leq 1$

T حاصل کدام یک از گزینه های زیر با بقیه متفاوت است؟

$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{3})}{\cos x - 1}$ (۴)
 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 + \cos x}$ (۳) ✓
 $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(2x + \frac{\pi}{3})}{1 + \sin x}$ (۲)
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x + \frac{\pi}{3})}{1 - \sin x}$ (۱)

A

وقتی فقط مخرج صفر میشه..

عدد روی صفر نسبی می شود بی نهایت! اما $+\infty$ یا $-\infty$ برای تعیین علامت بی نهایت باید علامت صفر مخرج را تعیین کنید! قبلا هم گفته بودیم! حالا بریم چندتا مثال ککولی ببینیم!

ex $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 - [\frac{x}{3}]x - 6}$

ex $\lim_{x \rightarrow (\Delta 40^\circ)^+} \frac{\tan(\frac{x}{3}) - \cos(\frac{2x}{3})}{\sin x}$

T اگر حد راست تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin 4x}$ در نقطه $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

$+\infty$ (۴✓) 0 (۳) 1 (۲) $-\infty$ (۱)

A

T اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{2}}{-2-3x^2+ax-b} = +\infty$ ، آنگاه حاصل $2b-a$ کدام است؟

36 (۴✓) 24 (۳) 12 (۲) 0 (۱)

A

T اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+x-2} & x > -2 \\ \frac{x^2+1}{4-x^2} & x < -2 \end{cases}$ باشد، در این صورت شکل تابع f ، اطراف نقطه $x = -2$ به کدام صورت است؟

(۴) (۳) (۲✓) (۱)

A

T نمودار تابع $y = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$ در مجاورت $x = 0$ به کدام شکل زیر شبیه است؟

(۴✓) (۳) (۲) (۱)

A

T نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|-2}{x^3-4x+3}$ در نزدیکی $x=1$ به کدام شکل زیر شبیه است؟

(۱) ✓ (۲) (۳) (۴)

A

T با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{f(x)}$ کدام است؟

(۱) ۰ ✓ (۲) -۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

A

حد در بی نهایت

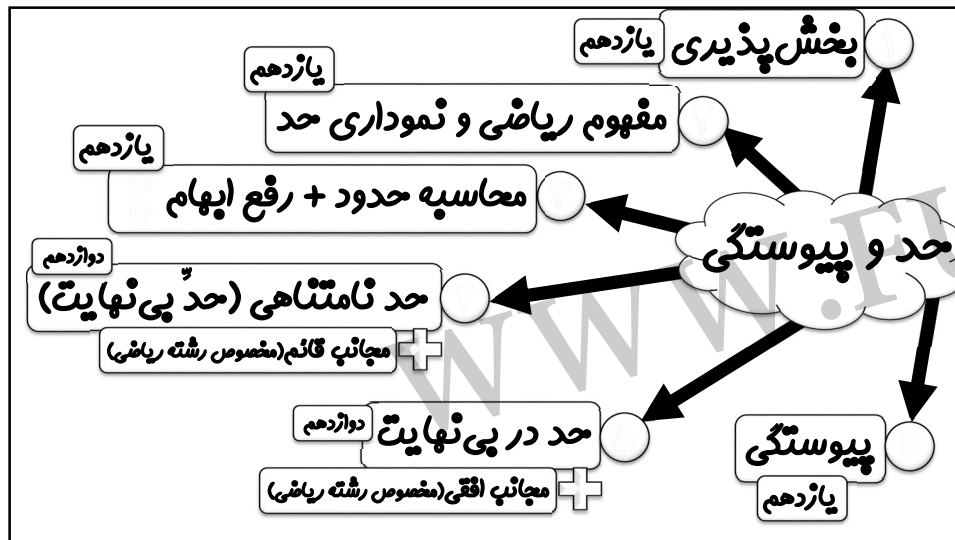
گاهی وقتی ایکس به $+\infty$ یا $-\infty$ میل میکند، هر مساوی یک عدد می شود که همان هر در بی نهایت است!

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

خط افقی $y = L$ در هر کدام از نمودارهای بالا یک مچانپ افقی برای تابع f می باشد!

هشدار! شرط لازم برای اینکه بتوانیم هر در بی نهایت تابعی را حساب کنیم این است که دامنه اش حداقل از یک طرف بی کران باشد!

ex $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4-x^2}$



هم ارزی پد توان (قانون بزرگترا)

$$\text{if } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \varphi(x) - \omega x - \nu(x) + \varphi_{\sim} - \nu(x)$$

$$\text{if } x \rightarrow 0 \Rightarrow -r\left(\frac{1}{x}\right)^r + r\left(\frac{1}{x}\right) \sim -r\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

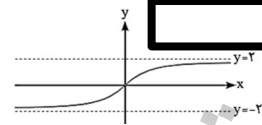
$$\text{if } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \left| x^r + x \right| \sim x^r, \sqrt[r]{x^r + x} \sim \sqrt[r]{x^r}, \sqrt[r]{x^r + x} \sim \sqrt[r]{x^r}, \sqrt{x^r + x} \sim \sqrt{x^r}$$

T اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + c}{(a-1)x^2 + x - 4}$ برابر ۳- باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

$$Y(f) \quad 6(3) \quad 5(2) \quad 4(1)$$

A

T با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} [-f(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{f(x)}$ کدام است؟

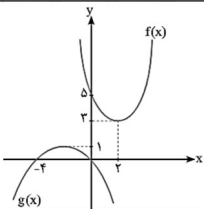

$$3(4) - 1(3) + 1(2) - 3(1) \checkmark$$

A

T اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ حاصل باشد، $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\epsilon - [x])g(x) = \epsilon$ ، $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x-1|}$

کدام است؟ (تقریبی داخل ۱۳۰) -۱(۱) ۱(۲) ۲(۳) ✓ -۲(۴)

A



T شکل مقابل، نمودار دو سهمی f و g را نمایش می دهد.

حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

$$-3(4) \quad -2(3) \quad -\frac{3}{2}(2) \quad -\frac{3}{4}()$$

A

T شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟ (تقریبی داخل ۱۳۰۲) $3(1)$ $-3(1)$ $3(2)$ $-4(3)$ $4(4)$

A

T نقطه $A(-\frac{1}{2}, 3)$ محل تلاقی مجانب های نمودار $y = \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟ $3(1)$ $\frac{3}{4}(2)$ $\frac{1}{4}(3)$ $1(4)$ (ریاضی خارج ۱۳۰۱)

A

T اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} [\frac{1}{x}] f(x)$ چقدر است؟ $-\frac{1}{2}(1)$ $1(2)$ $\frac{1}{2}(3)$ $-1(4)$ (تقریبی خارج ۱۳۰۱)

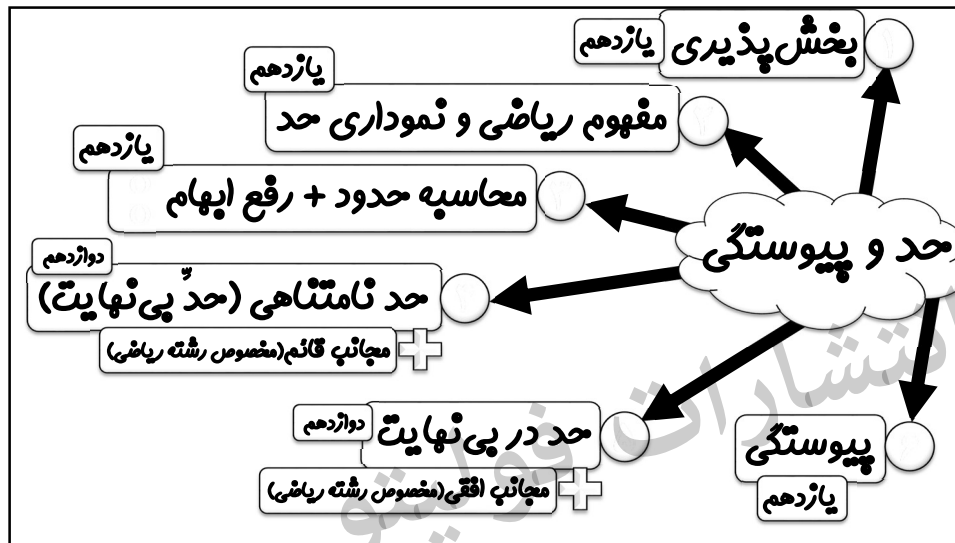
A

T اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)}$ ، فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن a کدام است؟ $\frac{1}{2}(1)$ $1(2)$ $\frac{3}{2}(3)$ $2(4)$ (ریاضی خارج ۱۳۰۰)

A

پیوستگی تابع f در a پیوسته است اگر بتوان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ نمودارش را آنجا رسم کرد

تعریف ریاضی تابع f در a پیوسته است هرگاه در این نقطه موجود و با مقدارش برابر باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$


T اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x^3+3x^2+1}-\sqrt{3x}}{(x-1)^3} & x \neq 1 \\ \sqrt{3}a & x = 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{-1}{6}$ ۴) $\frac{-1}{12}$

A

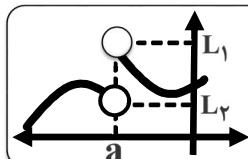
T نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. در چند نقطه این تابع حد دارد، ولی ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

A

پیوستگی راست!

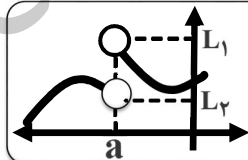
اگر فقط در راست و مقدار برابر باشند و این دو با هم برابر نباشند



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = L_1 \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

پیوستگی چپ!

اگر فقط در چپ و مقدار برابر باشند و این دو با هم برابر نباشند



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = L_2 \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

T در تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x^2 - x - 6|}$ ، اگر $f(-2) = a$ باشد، به ازای کدام مقدار a تابع در $x = -2$ پیوستگی راست خواهد داشت؟

$-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۱)

A

T تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x + 6} & x < -3 \\ \left[-\frac{x}{3}\right] + a & x = -3 \\ x^2 - 3x + 1 & x > -3 \end{cases}$ در $x = -3$ پیوستگی چپ دارد. مقدار a کدام است؟

-3 (۴) 2 (۳) -2 (۲) 0 (۱)

A

T اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می کند؟ $-2(1)$ $-1(2)$ $1(3)$ $2(4)$ (کلور ۹۰)

A

تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{2bx^2} & x > 0 \\ |b-x| & x = 0 \\ [x] - 2a & x < 0 \end{cases}$ ، یک تابع همواره پیوسته است. مقدار حقیقی $b-a$ کدام است؟ $2(1)$ $\frac{1}{4}(2)$ $\frac{5}{4}(3)$ $\frac{25}{16}(4)$ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

A

T اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می کند؟ $-2(1)$ $-1(2)$ $1(3)$ $2(4)$ (کلور ۹۰)

A

WWW.FULLITO.COM